Numeri normali

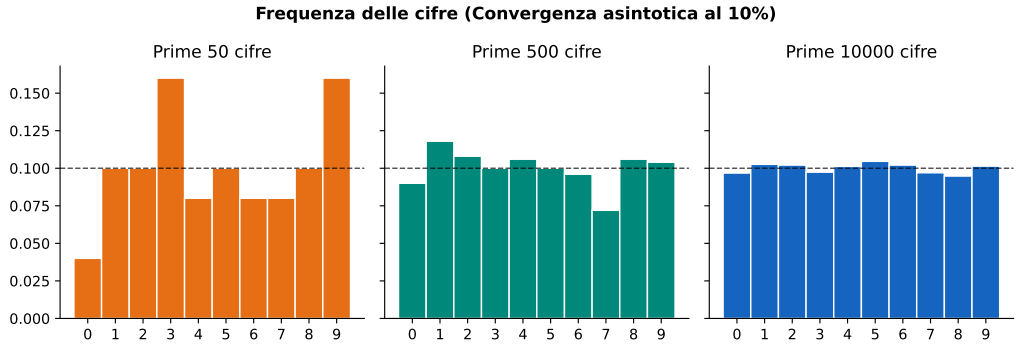
Che cos'è un numero normale?

Nello sviluppo decimale di un numero razionale, da un certo punto in poi le sue cifre si ripeteranno all'infinito nello stesso ordine. Poiché i razionali costituiscono solo una piccolissima minoranza tra i numeri reali, ci si aspetta che questo comportamento rappresenti un'eccezione. Ciò motiva la seguente definizione:

Definizione

Un numero reale x si dice **normale (in base 10)** se, nella sua espansione decimale, ogni possibile sequenza finita di k cifre compare con frequenza asintotica pari a 10^{-k}.

Cosa significa? Immaginiamo di lanciare un dado a 10 facce (con le cifre da 0 a 9) e di annotare i risultati. Il numero ottenuto da questa sequenza di cifre è normale in base 10. In un numero del genere, nessuna cifra è privilegiata: ognuna compare il 10% delle volte. Inoltre, ogni coppia di cifre compare l'1% delle volte, ogni terna lo 0,1% e così via. Fu il matematico Émile Borel nel 1909 a chiamarli così, dimostrando che possedere questa proprietà è, di fatto, "la norma" per i numeri reali.



Esempi

Esistono davvero? Sì, ma quelli noti sono stati costruiti appositamente.

- **Costante di Champernowne (1933):** $0,12345678910111213\ldots$ (dopo la virgola compaiono tutti i numeri naturali).
- **Costante di Copeland-Erdős (1946):** $0,23571113171923\ldots$ (dopo la virgola compaiono tutti i numeri primi).

Tutta la nostra vita dentro π...?

La biblioteca di Babele. In un famoso racconto di Jorge Luis Borges, esiste una biblioteca infinita che contiene tutti i libri possibili, contenenti ogni combinazione di lettere. Se un numero è normale, la sua sequenza decimale è come quella biblioteca: da qualche parte, tra quelle infinite cifre, ci sono i nostri numeri di telefono, i nostri codici fiscali, e persino questo esatto testo codificato in numeri.

Basta non essere razionali?

La domanda sorge spontanea: se un numero non è razionale (e quindi non ha un'espansione decimale periodica), allora è sicuramente normale? La risposta è no. Ad esempio, la **costante di Liouville** ($\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$) è irrazionale, ma non normale: il suo sviluppo decimale utilizza esclusivamente le cifre 0 e 1, e la frequenza asintotica dello zero è pari a 1.

E per quanto riguarda π, e o $\sqrt{2}$? Malgrado la maggior parte dei matematici si aspetta che siano normali, nessuno lo ha ancora dimostrato. Questi numeri superano semplici test di normalità basati sulla ricerca di stringhe di lunghezza fissata: ad esempio, tutte le possibili date di compleanno (nel formato GG/MM/AA) compaiono nel loro sviluppo decimale. Questo non basta a dimostrare la normalità: persino il numero razionale $1/47^4$ possiede un periodo che "contiene tutti i compleanni".

Se per verificare questa proprietà per π bastano le sue prime 15 milioni di cifre, il test diventa proibitivo per stringhe più lunghe: per trovare tutte le combinazioni di 13 cifre servono *259 mila miliardi* di decimali. Per sequenze da 14 cifre, la quantità necessaria resta tuttora ignota.

Il Paradosso di Borel (1909)

Normali quasi ovunque. Émile Borel afferma che "quasi tutti" i numeri reali sono normali. In termini matematici, l'insieme dei numeri non normali ha *misura di Lebesgue pari a zero.*

Cosa significa? Immaginiamo di lanciare una freccetta su un intervallo numerico limitato, ad esempio tra 0 e 1. Anche se i numeri non normali al suo interno sono infiniti, la probabilità di colpirne uno è matematicamente 0: otterremo un numero normale al 100%. Eppure, a parte rare eccezioni, dimostrare che uno *specifico* numero sia normale resta ancora un'impresa irrisolta.