Multipli, MCD e il problema di Frobenius

L'algebra delle monete

Se abbiamo due numeri interi a e b, non entrambi nulli, il loro *massimo comun divisore*, indicato con $\text{MCD}(a, b)$, è il più grande numero intero positivo che li divide entrambi.

Teorema

Siano a e b due numeri interi e sia d il loro massimo comun divisore. L'equazione

$$\mathbf{ax + by = c}$$

ammette soluzioni per numeri interi x e y *se e solo se* c è un multiplo di d.

Cosa significa? In termini pratici, l'espressione $ax + by$ descrive un modo per ottenere un certo importo usando monete di valore a e b. Se x e y sono positivi, indicano quante monete dei due tipi utilizziamo; se invece uno dei due è negativo, possiamo interpretarlo come il resto che il negoziante ci restituisce.

Il teorema ci dice che gli importi che possiamo ottenere sono *tutti e soli i multipli di d*. In particolare, se a e b sono *coprimi* ($d = 1$), possiamo ottenere l'importo 1 e quindi, ripetendo questa combinazione, qualsiasi cifra intera.

Il Problema di Frobenius

E se il negoziante non dà il resto? In tal caso i multipli x e y, cioè le rispettive quantità dei due tipi di monete usate, devono essere non negativi ($x, y \geq 0$). J.J Sylvester dimostrò che, pur senza il resto, se a e b sono coprimi esiste sempre una soglia oltre la quale ogni numero è ottenibile. L'importo più grande impossibile da pagare senza resto è pari a

$$\mathbf{ab - a - b}.$$

Tortuga VS Port Royale

Tortuga e Port Royale sono due paesi che accettano monete d'oro e d'argento, ma con tassi di cambio differenti.

- A **Tortuga**, le monete d'oro valgono 7 dobloni, mentre quelle d'argento 4. I valori $a = 4$ e $b = 7$ sono *coprimi*: utilizzando la formula $ab - a - b$, l'ultimo conto impossibile da saldare senza resto è $(4 \times 7) - 4 - 7 = 17$. Dal 18 in poi, si riesce a pagare qualunque somma.
- A **Port Royale**, una moneta d'oro vale 9 dobloni mentre quelle d'argento ne valgono 6. Poiché $\text{MCD}(9, 6) = 3$, potremo comprare (senza regalare monete o chiedere sconti) solo oggetti che costino *valori multipli di 3*. Senza resto, non potremo pagare conti da 3 dobloni, ma dal 6 in poi riusciremo ad ottenere tutti i multipli di 3, utilizzando il giusto numero di monete d'oro e di argento.

Altri scenari

Cosa succederebbe in queste situazioni?

1. Ci troviamo in un negozio che accetta solo monete da 5 e da 8. Senza poter ricevere resto, qual è l'ultimo importo esatto che non riusciremo mai a pagare?

2. Abbiamo due tipi di monete, una da 3 dobloni e una che ne vale 5. Il negoziante può finalmente darti il resto. Qual è la combinazione più semplice (quante monete dobbiamo dare e ricevere) per pagare esattamente 1? E se il cambio fosse da 11 e da 13 dobloni rispettivamente?

3. Un mercato accetta solo monete da 4 e da 6. Quali importi rimarranno irraggiungibili, indipendentemente dalla possibilità di ricevere il resto?



Il grafo delle combinazioni con monete da 4 (verde) e da 7 (arancione): il 17 è l'ultimo valore escluso. Dal 18 in poi, il percorso copre ogni numero successivo.