

Appunti di Meccanica Analitica

Riccardo Amici Diego Salvi

Sommario

In queste dispense sono stati riportati e organizzati gli appunti, presi a lezione, del corso tenuto dalla Prof.ssa Annalisa Marzuoli del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia. Gli autori hanno ritenuto e sperato che le presenti dispense potessero essere un valido sostegno per riuscire a seguire meglio le spiegazioni della professoressa e un aiuto allo studio di una materia che richiede, per sua stessa natura, un salto di astrazione rispetto ai concetti della meccanica a cui si è intuitivamente abituati e che quindi può indurre ad una iniziale difficoltà nella comprensione dei concetti trattati. Ringraziamo la Prof.ssa Marzuoli e l'attuale esercitatore Dott. Giuseppe Bozzi per le pronte correzioni ed invitiamo a segnalare i restanti errori e mancanze ad uno dei due indirizzi e-mail riky.amici@gmail.com e sal.diec96@gmail.com per poter procedere ad una immediata correzione.

Dicembre 2017

Indice

Prefazione	3
Perché studiare Meccanica Analitica	3
1 Equazione fondamentale della dinamica nella forma di Lagrange	5
1.1 Moto unidimensionale	5
1.2 Moto spaziale	7
2 Cinematica di sistemi vincolati	9
2.1 Classificazione dei vincoli	10
2.2 Spazio delle configurazioni	11
2.2.1 Mappa di immersione	11
2.2.2 Utilizzo della mappa di immersione	14
2.3 Energia cinetica	15
3 Dinamica dei sistemi vincolati	17
3.1 Spostamento virtuale	17
3.1.1 Vincoli lisci	19
3.1.2 Vincolo di rigidità	19
3.1.3 Vincolo di puro rotolamento	20
3.2 Principio dei lavori virtuali	21
3.2.1 Stazionarietà dell'energia potenziale	22
3.3 Equazioni di Eulero-Lagrange	22
3.3.1 Principio di D'Alembert	23
3.3.2 Invarianza in forma delle equazioni di Lagrange	24
4 Leggi di conservazione	27
4.1 Momento coniugato	27
4.2 Conservazione hamiltoniana	30
4.3 Applicazione del formalismo lagrangiano	31
4.4 Simmetrie	32
4.5 Trasformazioni infinitesime e teorema di Noether	33

5	Oscillazioni	36
5.1	Equilibrio stabile	36
5.2	Metodo della soluzione di prova	38
5.3	Modi normali	40
6	Il problema dei due corpi	41
6.1	Riduzione del problema	41
6.2	Seconda legge di Keplero	44
6.3	Equazione delle orbite	44
6.4	Relazione tra energia ed eccentricità	46
6.5	Considerazioni finali	47
7	Corpo Rigido	49
7.1	Cinematica del corpo rigido	49
7.1.1	Rotazioni infinitesime	53
7.1.2	Asse di istantanea rotazione	56
7.2	Dinamica del corpo rigido	58
7.2.1	Momento angolare ed energia cinetica	58
7.2.2	Angoli di Eulero	60
7.3	Cinematica e dinamica relative	61
7.4	Dinamica di alcuni sistemi rigidi notevoli	64
7.4.1	Equazioni di Eulero	64
7.4.2	Cenni alla risoluzione	66
7.4.3	Trottole	68
8	Formalismo hamiltoniano	70
8.1	Principio di Hamilton nello spazio delle configurazioni	70
8.2	Equazioni di Hamilton	71
8.2.1	Da formalismo Lagrangiano	72
8.2.2	Da Principio Variazionale	73
8.3	Trasformazioni canoniche	74
8.3.1	Criterio di Lie	75
8.4	Parentesi di Poisson	77
8.5	Teorema di Poisson	79
8.6	Teorema di Liouville	81
8.7	Trasformazioni canoniche infinitesime	83
8.7.1	Teorema di Noether hamiltoniano	83
8.8	Simmetrie: esempi	84
8.9	Momento angolare e parentesi di Poisson	86
8.10	Campo di forze centrali: approfondimento	87
8.10.1	Orbite chiuse	88
8.10.2	Costanti del moto nel problema dei due corpi	88
8.11	Struttura algebrica dei momenti angolari	89

Prefazione

Perché studiare Meccanica Analitica

La Meccanica Classica a cui siamo abituati si divide in due grandi parti, Cinematica e Dinamica, nella quale un particolare caso è svolto dalla Statica, e si propone di studiare il moto di sistemi macroscopici, come ad un esempio un numero finito di punti materiali o sistemi continui, e le sue cause; con la dicitura "sistemi continui" si intendono ad esempio i corpi rigidi, i mezzi continui elastici e i fluidi, e di quest'ultimi si occupa la Meccanica Statistica. Nel corso della Storia il progresso scientifico e lo studio della realtà hanno portato ad osservare fenomeni che non riuscivano ad essere spiegati tramite le leggi classiche, una nuova epoca della Fisica era alle porte: la Meccanica fu quindi estesa attraverso nuove teorie per spiegare il comportamento della natura in condizioni estreme ad esempio per corpi viaggianti a velocità prossime a quelle della luce (Meccanica Relativistica), o fenomeni che avvengono su scala di lunghezza atomica e subatomica (Meccanica Quantistica), fino a giungere a formulazioni come la Teoria dei Campi che si propone di dare un'ampia spiegazione sul funzionamento della realtà. Un approccio nuovo ed alternativo a quello newtoniano si è rivelato dunque necessario, anche se non intuitivo. La Meccanica Analitica è un modo di affrontare anche questi problemi, ed è costituita da tre formalismi (in questo corso saranno studiati solo i primi due) che prendono nome dagli illustri fisici e matematici che li svilupparono: formalismo di Lagrange, di Hamilton e di Hamilton-Jacobi, ma come vedremo queste formulazioni analitiche non riescono a descrivere tutti i fenomeni meccanici, esattamente come la formulazione di Newton non permette lo studio di fenomeni particolari ed inusuali come quelli descritti in precedenza.

Una prima importante differenza tra il formalismo newtoniano e quelli di Lagrange, Hamilton e Jacobi è l'utilizzo di grandezze scalari come elementi fondamentali invece che di grandezze vettoriali.

Sorge a questo punto spontanea una domanda: che vantaggi porta studiare la Meccanica Analitica? Innanzitutto è vantaggioso perché i principi variazionali (postulati) coinvolgono *una* funzione scalare, come la lagrangiana o l'hamiltoniana, da cui si ricavano le equazioni del moto e da quest'ultime derivano i teoremi di conservazione. Infine il vantaggio di applicare metodi

analitici è chiaro perché è possibile estenderli oltre i confini della Meccanica Classica.

- Formalismo lagrangiano \rightarrow Relatività speciale, Teoria dei Campi e sistemi continui.
- Formalismo hamiltoniano \rightarrow Meccanica Quantistica.
- Formalismo di Hamilton-Jacobi \rightarrow equazione di Schrödinger

Capitolo 1

Equazione fondamentale della dinamica nella forma di Lagrange

Un punto materiale libero, ovvero non soggetto a vincoli, può essere descritto in \mathbb{R} se il moto è unidimensionale o in \mathbb{R}^3 se è nello spazio. Analizzeremo separatamente i due casi e utilizzeremo come convenzione i simboli \vec{r} e m per indicare rispettivamente il vettore posizione del punto e la sua massa; infine supponiamo che il punto sia soggetto ad un campo di forze conservativo.

1.1 Moto unidimensionale

La prima cosa da fare nella nostra trattazione è definire una *forza* in termini di energia potenziale. La funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è detta forza conservativa $\vec{F}(x) = (F_x, 0, 0)$ se $\exists V = V(x)$ detta energia potenziale tale che

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} . \quad (1.1)$$

Osserviamo che la funzione V è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria.

I movimenti del sistema (in questo caso il singolo punto) avvengono per ipotesi lungo l'asse delle ascisse, quindi possiamo parametrizzare il suo moto con

$$x = x(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Grazie al secondo principio della Dinamica vale l'equazione $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$ che possiamo riscrivere con la più compatta convenzione dei punti $m\ddot{x} = F(x)$. Sostituiamo questa relazione nella definizione di forza sopra riportata ed otteniamo

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} , \quad (1.3)$$

la quale è un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine, per opportune funzioni $F(x)$, che ammette *unica* soluzione a partire da condizioni iniziali definite: in questo caso si avrà bisogno di due condizioni iniziali poiché l'equazione differenziale è del secondo ordine

$$\begin{cases} t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Proposizione 1.1. *L'equazione (1.3) è equivalente al sistema delle due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

ove $\mathcal{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(x)$ è detta lagrangiana. Lo spazio ambiente della lagrangiana è uno spazio astratto, detto spazio posizione-velocità, in cui le variabili indipendenti sono (x, v) .

Dimostrazione. Procediamo calcolando le derivate parziali a blocchi: siccome V dipende da x ma non da v abbiamo che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2}mv^2 - V(x) \right) = mv. \quad (1.6)$$

Considerando la massa un'invariante e sostituendo la prima equazione della (1.5) otteniamo $\frac{d}{dt}(mv) = m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)$. Il secondo blocco è la derivata parziale della lagrangiana fatta rispetto alla posizione

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}mv^2 - V(x) \right) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{dV}{dx}. \quad (1.7)$$

Ricomponendo i risultati trovati vediamo che dalla seconda equazione di (1.5) si ricava $m\ddot{x} - F(x) = 0$, cioè la seconda legge della Dinamica di Newton. \square

Definiamo *Equazione di Newton nella forma di Lagrange* l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

dove la lagrangiana è $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$.

1.2 Moto spaziale

Prendiamo ora in analisi lo spazio fisico, cioè lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 , ed introduciamo una terna inerziale cartesiana ortogonale Σ di origine O . Definiamo il vettore posizione di un punto P come il vettore che congiunge l'origine O e il punto stesso, cioè $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; se questo punto si muove nello spazio le varie coordinate saranno funzioni del tempo: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. L'equazione di Newton che descrive il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una risultante delle forze F diventa quindi

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r); \quad (1.9)$$

ove la forza dipende solo dal modulo del vettore posizione del punto e non dal tempo, dato che, nella nostra prima analisi, prendiamo in considerazione solo forze conservative, mentre una forza del tipo $\vec{F} = \vec{F}(t)$ sarebbe una forza impulsiva. Si potrebbe obiettare che, essendo $\vec{r}(t)$ dipendente dal tempo, allora anche $\vec{F}(r)$ dovrebbe esserlo, ma in realtà non è così poiché \vec{r} è funzione di t solo *durante* un movimento, mentre la variabile su cui opera \vec{F} è la soluzione dell'equazione fondamentale.

Proseguiamo il discorso in modo analogo al caso di moto unidimensionale cioè definendo un potenziale V , che esiste siccome \vec{F} è conservativa. Detta $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con $V = V(x, y, z)$ definita a meno di una costante, introduciamo la funzione *forza* $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $\vec{F}(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\nabla}V = -\text{grad } V$, dove l'operatore nabla $\vec{\nabla}$ è definito come

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.10)$$

Tale operatore, se applicato alla funzione scalare f , restituisce il suo *gradiente* e se viene moltiplicato scalarmente o vettorialmente con una funzione f vettoriale, dà oggetti diversi: $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ è la *divergenza di f* mentre $\vec{\nabla} \times \vec{f}$ è il *rotore di f* .

Proiettando l'equazione di Newton sui tre assi della terna Σ otteniamo tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z) = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z) = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z) = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \end{cases} \quad (1.11)$$

Ricordando ora che $m \frac{d\vec{r}}{dt} = m\dot{\vec{r}} = \vec{p}$ è la quantità di moto, possiamo scrivere l'equazione di Newton nella forma

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}V. \quad (1.12)$$

Verifichiamo ora che è sufficiente conoscere l'energia cinetica T del punto materiale per poter scrivere il primo membro della (1.12).

$T = \frac{1}{2}m(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ e vediamo che

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = p_y \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z \end{cases} \quad (1.13)$$

mentre le derivate parziali di T rispetto alle variabili x, y, z , valgono sempre 0. Ricordando che $\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = 0$, le tre equazioni scalari (1.11) diventano quindi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial(T - V)}{\partial x_i}, \quad (1.14)$$

con $i = 1, 2, 3$.

Abbiamo quindi ritrovato l'equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ per ogni componente della terna Σ e il guadagno nello scrivere l'equazione di Newton in questa forma è che abbiamo necessità di conoscere la sola lagrangiana del punto materiale per poter risolvere il suo moto. Non è possibile scrivere le leggi del moto sui diversi assi in una singola equazione vettoriale; perciò la forma in cui deve essere presentato lo studio del moto di un sistema è

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Introduciamo una notazione nuova per le coordinate, e che assumerà un significato ben preciso solo nel prossimo capitolo. In ambito lagrangiano rinominiamo $(x, y, z) = (q_1, q_2, q_3)$ e $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, e scriviamo le precedenti equazioni in forma più compatta.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (1.16)$$

con $i = 1, 2, 3$. Vediamo quindi che la lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ dipende dalle coordinate iniziali, dalle loro velocità ed eventualmente dal tempo.

Capitolo 2

Cinematica di sistemi vincolati

Consideriamo un numero *finito* di punti materiali e per semplicità consideriamo un solo punto individuato in \mathbb{R}^3 tramite il vettore posizione \vec{r} (per N particelle, \vec{r}_j con $j = 1, 2, \dots, N$ vettori posizione) riferito ad una terna inerziale. Se non vi sono restrizioni di tipo cinematico al moto del punto diciamo che esso è libero, cioè $P(x, y, z)$ è tale che $x, y, z \in \mathbb{R}$; se invece esistono tali restrizioni diciamo che il punto P è *vincolato*.

Ad esempio, supponiamo che il punto P sia vincolato a muoversi lungo una retta giacente nel piano $z = 0$: le sue condizioni di vincolo allora saranno del tipo $P(x, y, z)/\{z = 0, y = Ax + B \text{ con } A, B \in \mathbb{R}\}$; vediamo che le tre coordinate cartesiane, in presenza di un vincolo, *non sono indipendenti*.

La presenza di un vincolo nello spazio è tradotta

- matematicamente da espressioni che coinvolgono restrizioni su \vec{r} ;
- fisicamente dall'esistenza di una reazione vincolare $\vec{\psi}$.

L'equazione di Newton è data dalla formula $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{(a)} + \vec{\psi}$ dove $\vec{F}^{(a)}$ è il termine che indica la risultante delle forze attive sul punto P : in ambito lagrangiano infatti la principale classificazione delle forze è di forze attive e reazioni vincolari, mentre in ambito newtoniano questo genere di classificazione non è presente e vengono solo differenziate in forze esterne ed interne (classificazione presente anche nell'ambito lagrangiano).

Vediamo adesso un esempio che esplicita bene la necessità di associare ad un vincolo la sua reazione vincolare, cadendo altrimenti in un assurdo. Supponiamo che il punto P giaccia su un piano orizzontale sotto l'effetto dell'unica forza peso, allora $\ddot{\vec{r}} = 0 \forall t$. Trascurando l'esistenza del termine ψ e utilizzando l'equazione fondamentale otteniamo

$$\vec{F}^{(a)} = -mg\vec{k}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \implies 0 = -mg\vec{k}.$$

L'assurdo è evidente dal momento che $m \neq 0$ e $g \neq 0$: questo vuol dire che deve esistere una forza $\vec{\psi} = mg\vec{k}$ tale che la risultante di tutte le forze agenti su P sia nulla. Si presenta adesso un nuovo problema, perché affermando l'esistenza di tale forza $\vec{\psi}$ agente su P si sta implicitamente dicendo che il punto è sì fermo, ma *libero* nel senso della definizione data in precedenza. Si può uscire da questa difficoltà postulando che la forza attiva agisca su P , mentre la reazione vincolare sia applicata nel punto geometrico appartenente al piano su cui P è appoggiato; questo vuol dire che i punti di applicazione delle due forze sono gli stessi dal punto di vista geometrico (siccome il punto ha dimensione nulla), ma diversi dal punto di vista fisico.

2.1 Classificazione dei vincoli

Studiamo ora, dopo averne introdotto l'importanza e l'utilità, i vari tipi di vincolo. Supponiamo di avere N punti materiali liberi, identificati dal proprio vettore posizione \vec{r}_i ed osserviamo che tale sistema appartiene allo spazio delle posizioni $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3N}$ in cui i movimenti sono espressi in funzione del tempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Prendiamo per semplicità un singolo punto come caso iniziale ed attribuiamogli un vincolo che, come abbiamo detto in precedenza, deve essere tradotto da espressioni matematiche. Il primo caso che prendiamo in considerazione è quello di:

Definizione 2.1 (Vincolo olonomo). *Un vincolo è detto olonomo se esiste una funzione f tale che valga $f(x, y, z) = 0$ per ogni movimento, cioè se $f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \forall t$.*

È anche possibile definire funzioni del tipo $f(x, y, z, t) = 0$ che traducono l'esistenza di un vincolo mobile. Osserviamo inoltre che quando abbiamo due vincoli diversi tra loro, le funzioni $f(x, y, z)$ e $h(x, y, z)$ che traducono tali vincoli, devono essere indipendenti tra loro. Definiamo *gradi di libertà* i parametri necessari a descrivere la posizione del sistema fisico considerato. Per descrivere la posizione del punto rappresentativo il numero di gradi di libertà è $n \stackrel{\text{def}}{=} (3 - k)$, ove k è il numero di equazioni di vincolo olonomo a cui è sottoposto il punto, e si definiscono *gradi di libertà*; i parametri liberi sono dette *coordinate lagrangiane*.

Il caso generale è quello che considera gli N punti materiali.

Definizione 2.2 (Gradi di libertà). *Assegnate k relazioni vincolari indipendenti valide per ogni movimento $f_\alpha(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t); t) = 0$ con $\alpha = 1, \dots, k$ e $\forall t$, diciamo che i gradi di libertà del sistema sono $n \stackrel{\text{def}}{=} (3N - k)$.*

Possiamo osservare inoltre che la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_\alpha}{\partial X_i} \end{pmatrix}$$

(derivate parziali di f_α calcolate rispetto alle componenti X_i) con $\alpha = 1, \dots, k$ e $i = 1, \dots, 3N$, ha rango massimo grazie all'indipendenza delle relazioni vincolari. Indichiamo ora la n-upla (q_1, \dots, q_n) delle coordinate indipendenti, ove la scelta della lettera "q" è fatta per sottolineare la differenza che esiste con le generiche componenti X_i , e osserviamo che in presenza di un vincolo olonomo possiamo parametrizzare i movimenti dell'i-esimo punto del sistema grazie al vettore posizione $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n; t)$ che può eventualmente dipendere dal tempo.

I vincoli olonomi svolgeranno un ruolo fondamentale nella nostra trattazione futura, ma è altresì importante accennare ad altri tipi di vincolo. Diciamo vincoli *anolonomi* quelli che possono essere tradotti da una disequazione del tipo $f(x, y, z) \geq 0$ e vincoli *differenziali* quelli descritti da $f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$ dove le ultime tre componenti sono quelle del vettore $d\vec{r}_i = \vec{r}_i(t+dt) - \vec{r}_i(t)$; vincoli di questo tipo dipendono quindi anche dalle derivate della funzione posizione ed osserviamo che se tali relazioni fossero integrabili, essi diventerebbero vincoli olonomi.

Un secondo tipo di classificazione di vincoli può invece essere quella che differenzia vincoli *scleronomi* (fissi) e *reonomi* (mobili), mentre una terza è quella che cataloga vincoli *lisci* (con ψ diretta lungo la direzione della componente cinematica vincolata) e *scabri* (che presentano attrito).

2.2 Spazio delle configurazioni

Nella trattazione di sistemi vincolati abbiamo visto e avremo in futuro possibilità di approfondire l'utilità di utilizzare le coordinate libere (o generalizzate, o lagrangiane), siccome il loro numero è sempre inferiore o uguale al numero di coordinate dello spazio delle posizioni. In questa sezione studieremo lo spazio in cui tali coordinate " q_i " vivono e in che modo queste possono rappresentare il moto del sistema di punti.

2.2.1 Mappa di immersione

Cominciamo la trattazione con un semplice esempio. Supponiamo di avere un singolo punto materiale vincolato a muoversi sulla superficie di una sfera

$$S^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

in cui riconosciamo un vincolo olonomo dalla forma $f(x, y, z) = 0$.

Osserviamo che tale struttura S^2 non è identificabile globalmente con il piano \mathbb{R}^2 perchè proiettando i punti della sua superficie sul piano stesso è possibile identificarli univocamente tutti a meno del "polo nord", il quale avrebbe proiezione all'infinito.

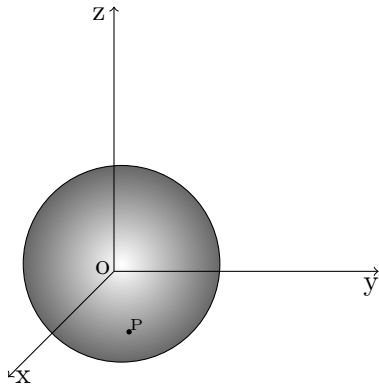


Figura 2.1: Sfera.

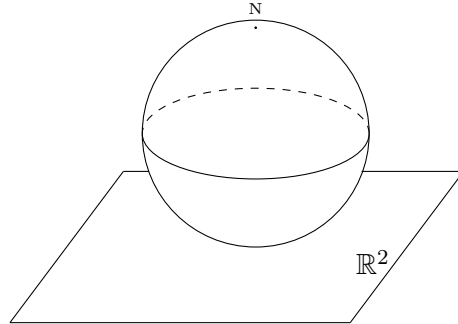


Figura 2.2: Sfera e piano.

Per ovviare a questo problema tagliamo orizzontalmente la sfera in due calotte, perciò la condizione su z diventa $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ a seconda che si consideri la calotta "nord" o "sud". Analizziamo il primo caso: proiettando ogni punto della calotta nord sul piano \mathbb{R}^2 sottostante otteniamo un disco $D^N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ (che sarà aperto se consideriamo solo le $z > 0$, perciò escludendo l'equatore).

Definiamo così la *mappa di immersione* $i : D^N \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione che associa $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ e vediamo che quindi $(x, y) \mapsto \vec{r}(x, y) = i(x, y)$ con \vec{r} il vettore posizione che identifica un generico punto sulla superficie della calotta. Procediamo allo stesso modo per la calotta sud, per la quale identifichiamo il disco D^S e la mappa di immersione $i : (x, y) \mapsto (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$. In entrambi i casi vediamo che comunque siamo riusciti a passare da tre coordinate spaziali (x, y, z) per identificare i punti sulla sfera a solo due, sfruttando la condizione di vincolo.

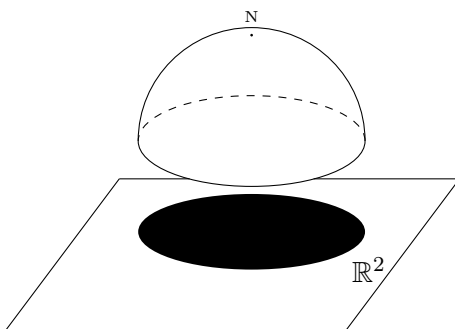


Figura 2.3: Proiezione calotta.

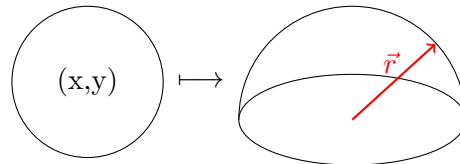


Figura 2.4: Mappa di immersione.

Si può obiettare che l'unione delle due calotte prese in considerazione non riesca ad includere l'intera sfera siccome è stato escluso l'equatore per ragioni di univocità delle proiezioni; in realtà questo non è un problema

siccome vi è un teorema della geometria differenziale, il quale assicura che bastano due aperti per ricoprire l'intera sfera.

Fuori da questo lungo esempio è possibile estendere il discorso ad una qualunque superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ i cui punti saranno identificati dalla mappa di immersione che permette di definire $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2)$. Attenzione: il significato geometrico di (q_1, q_2) è più profondo che di semplici componenti di un vettore in \mathbb{R}^2 come invece siamo abituati a pensare, infatti le coordinate necessarie ad individuare un punto sulla calotta sferica sono due, e il vettore posizione \vec{r} dato dalla mappa di immersione opera solo su queste due coordinate e non sulle tre dello spazio fisico. Tali oggetti sono le informazioni attraverso cui è possibile identificare un punto nello spazio, ma non necessariamente hanno il significato fisico di distanza da un'origine: per descrivere un punto, infatti, possiamo specificare quanto esso sia lontano dall'origine e quale angolo vi sia tra la sua distanza da O e un asse coordinato (si sta alludendo alle coordinate polari).

Lo spazio in cui vivono le q_i con $i = 1, \dots, n$, come accennato in apertura, è in generale lo *spazio delle configurazioni* \mathcal{C}^n ed è una varietà differenziabile di dimensione n . Una varietà differenziabile $M^n \subset \mathbb{R}^n$ se e solo se ammette un sistema di coordinate globali (come ad esempio (x, y, z)). In quanto tale, lo spazio delle configurazioni ha bisogno che siano definiti i suoi assi coordinati. Mantendo due componenti per semplicità, diciamo vettori coordinati

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

i quali sono linearmente indipendenti in \mathbb{R}^3 e generano il piano tangente alla superficie Σ nel punto individuato da \vec{r} .

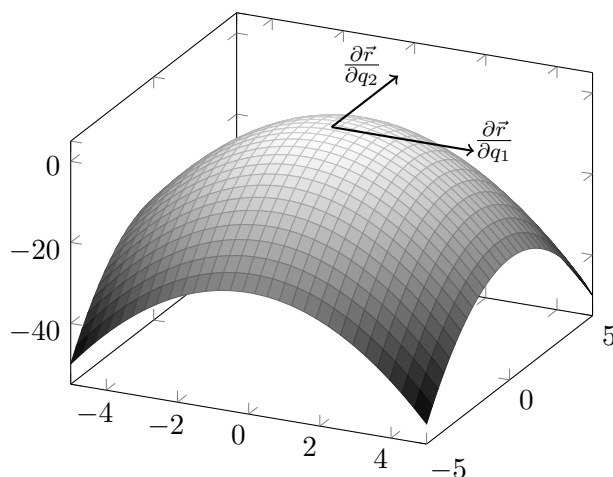


Figura 2.5: Generica superficie.

Ritornando un istante al significato intuitivo e cartesiano di assi coordinati a cui siamo abituati, osserviamo che la definizione sopra espressa di $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ diventa \vec{i} nel momento in cui intendiamo $q_1 = x$.

2.2.2 Utilizzo della mappa di immersione

Durante la precedente trattazione circa le calotte sferiche abbiamo anche accennato che in determinati casi è necessario operare un cambiamento di coordinate e in questa sezione ci avvaliamo ancora di un esempio chiarificatore per evidenziare come la mappa di immersione per passaggio di coordinate debba essere invertibile.

Diciamo $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ il piano di \mathbb{R}^2 , in cui quindi le coordinate generalizzate sono solo (x, y) e portiamoci in coordinate polari piane: tale scelta è dettata dal fatto che molte situazioni fisiche (come i moti circolari o i campi di forza centrali) sono facilmente parametrizzabili attraverso queste coordinate. La trasformazione che andiamo a prendere in considerazione è $(\Sigma; x, y) \rightarrow (\Sigma; \rho, \theta)$ con

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (2.2)$$

e in questo caso le linee coordinate del nuovo spazio sono ρ , le semirette uscenti da 0 con $\rho > 0$, e $\theta \in [0, 2\pi)$. Il determinante della matrice di trasformazione è

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho,$$

e il determinante della trasformazione non può essere nullo perchè la matrice deve essere invertibile, dunque $\rho > 0$.

Un altro utilizzo della mappa di immersione può essere fatto quando il punto che si vuole identificare attraverso le q_i è variabile nel tempo.

Supponiamo ora di avere un punto $P \in \mathbb{R}^3$ identificato in una terna cartesiana inerziale, vincolato ad una qualunque superficie Σ fissa (come già visto sono allora necessarie per identificarlo solo due coordinate generalizzate) e diciamo che tale punto si muova, perciò vi sarà un'associazione data dalla mappa composta $t \mapsto (q_1(t), q_2(t))$. La mappa di immersione in questo caso è l'applicazione i che associa le coordinate generalizzate q_i al vettore posizione $\vec{r} = \vec{r}(q_1(t), q_2(t))$, il quale è allora *implicitamente* funzione del tempo. La sua derivata totale rispetto alla variabile t ci permette di trovare la velocità istantanea del punto P vincolato a Σ è

$$\frac{d\vec{r}(q_1(t), q_2(t))}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2$$

in cui riconosciamo i vettori coordinati dello spazio tangente alla superficie Σ nel punto identificato da \vec{r} .

Considerando ora n coordinate generalizzate ed N punti materiali abbiamo la formula generale della velocità del punto

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad \text{con } i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

2.3 Energia cinetica

Studiamo ora l'energia cinetica che possiede un punto materiale P di massa m in movimento vincolato ad una superficie Σ mobile (vincolo reonomo), il tutto avendo fissato una terna inerziale. Le condizioni di questo problema quindi sono due, ossia la presenza di un vincolo olonomo che ci induce a scrivere che esiste una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0$ e il moto di tale vincolo, che si può parametrizzare tramite $z|_{\Sigma} = vt'$, supponendo ad esempio che la superficie si muova verticalmente con velocità v costante. Osserviamo che la scelta della variabile t' è stata fatta per differenziarla dalla variabile t , sempre temporale, che però sfrutteremo per parametrizzare la traiettoria del punto sulla superficie, quindi evidenziamo che $t' \neq t$.

L'applicazione che descrive il moto del punto nello spazio delle configurazioni è quindi del tipo $t \mapsto (q_1(t), q_2(t), t')$ e quindi opera sull'insieme $\mathcal{C}^n \times \mathbb{R}$; la mappa di immersione è l'applicazione $i : (q_1(t), q_2(t), t') \mapsto \vec{r}(q_1(t), q_2(t), t')$ ma siccome in meccanica il tempo è assoluto, semplifichiamo la notazione scrivendo che $\vec{r} = \vec{r}(q_1(t), q_2(t), t)$ in cui è resa esplicita la dipendenza dal tempo per sottolineare la presenza di un vincolo reonomo. La velocità che ci serve per calcolare l'energia cinetica è quindi

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

in cui la somma dei primi due addendi a secondo membro è detta velocità intrinseca. In generale possiamo scrivere che

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad \text{con } i = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

Affermiamo quindi che un vincolo è scleronomo o fisso se e solo se $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$.

Siamo ora pronti per calcolare l'energia cinetica T :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) + 2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_j \right) + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sviluppiamo le opportune moltiplicazioni distribuendo le parentesi e introduciamo le funzioni A, B, C in modo da ottenere infine

$$T = A(q, t) + \sum_j B_j(q, t) \cdot \dot{q}_j + \sum_{j,k} C_{j,k}(q, t) \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \quad (2.6)$$

In meccanica newtoniana T era funzione quadratica della velocità mentre nella meccanica lagrangiana essa è composta da un termine non dipendente dalla velocità, da uno lineare nelle \dot{q} e uno quadratico nelle \dot{q} ; notiamo che nel caso di vincoli fissi, ovvero con l'ipotesi di $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$, sopravvivono solo gli ultimi termini in modo da ottenere proprio una funzione quadratica omogenea delle \dot{q} .

Capitolo 3

Dinamica dei sistemi vincolati

Studiamo ora la dinamica dei sistemi vincolati analizzata dal punto di vista lagrangiano. Partiremo dal caso particolare della statica introducendo alcune grandezze (es. *spostamenti virtuali*) che nel formalismo newtoniano non sono presenti. Il passaggio alla dinamica vera e propria avverrà grazie alla formulazione del *Principio dei lavori virtuali* che ci permetterà, attraverso il Principio di D'Alembert, di scrivere le fondamentali equazioni di Eulero-Lagrange. È importante sottolineare che i principi enunciati in questo capitolo *non* sono indipendenti dal secondo principio della dinamica di Newton.

3.1 Spostamento virtuale

Consideriamo un sistema formato da un numero finito N di punti materiali soggetto a k equazioni di vincolo (vincoli olonomi). Il numero di gradi di libertà n del sistema è dato per definizione da $3N - k$. Le k equazioni che definiscono i vincoli sono funzioni algebriche e, trattandosi di vincoli olonomi, possiamo riscriverle come

$$f_\alpha(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t); t) = 0 \quad (3.1)$$

con $\alpha = 1, \dots, k$.

Siccome le k equazioni sono tra di loro indipendenti la matrice

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial X_B} \right),$$

dove $X_B = \{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots\}$, ha rango massimo.

Vogliamo ora calcolare la derivata totale rispetto al tempo delle f_α

$$\frac{d}{dt} f_\alpha(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t); t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0; \quad (3.2)$$

questa vale $\forall \alpha = 1, \dots, k$ e $\forall t$.

Moltiplicando formalmente per dt la (3.2) otteniamo

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, k. \quad (3.3)$$

Risolviamo la (3.3) per trovare $\{d\vec{r}_i \equiv \vec{v}_i dt\}_{i=1, \dots, N}$ che sono le soluzioni delle equazioni di vincolo, ovvero gli spostamenti infinitesimi compatibili con i vincoli, che avvengono in dt a velocità \vec{v}_i . Si possono trovare due insiemi di spostamenti possibili $\{d\vec{r}_i\}$ e $\{d\vec{r}'_i\}$ tali che verifichino $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ e $d\vec{r}'_i = \vec{v}'_i dt$ ($d\vec{r}_i$ e $d\vec{r}'_i$ differiscono per infinitesimi di ordine ≥ 2). Sottraendo $\forall \alpha$ le due equazioni trovate otteniamo

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}'_i} d\vec{r}'_i \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} (d\vec{r}_i - d\vec{r}'_i) = 0$$

e definendo $d\vec{r}_i - d\vec{r}'_i \stackrel{\text{def}}{=} \delta \vec{r}_i$ si ottiene che

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.4)$$

dove si è sfruttata l'identità $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}'_i}$ dovuta al fatto che \vec{r}_i e \vec{r}'_i dipendono dallo stesso tempo e quindi f_α varia allo stesso modo. Riscrivendo

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3.5)$$

Queste sono le equazioni che permettono di ricavare gli *spostamenti virtuali* $\{\delta \vec{r}_i\}$ che possono essere visti come gli spostamenti compatibili con i vincoli che avvengono a tempo *congelato*.

Introduciamo ora, prima di parlare di lavori virtuali, un'altra classificazione di vincolo non ancora studiata.

Definizione 3.1. *Un vincolo si dice bilatero se accanto ad ogni spostamento virtuale $\delta \vec{r}$ può esserci anche $-\delta \vec{r}$.*

Prima di affrontare il concetto di lavoro virtuale riprendiamo il concetto di lavoro infinitesimo compiuto da una forza \vec{F} in uno spostamento infinitesimo \vec{r}

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}^{(a)} + \vec{\psi}) \cdot d\vec{r} = dW; \quad (3.6)$$

in analogia il *lavoro virtuale* sarà definito da

$$\delta W \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{F}^{(a)} + \vec{\psi}) \cdot \delta \vec{r}. \quad (3.7)$$

Definiamo ora un'importante tipologia di vincoli fondamentali per il formalismo lagrangiano.

Definizione 3.2. I vincoli che esercitano forze vincolari $\vec{\psi}_i$ e che soddisfano

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{\psi}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 ; \quad (3.8)$$

vengono detti vincoli a lavoro ¹ virtuale totale nullo.

Trattiamo ora alcuni esempi che soddisfano la (3.8).

3.1.1 Vincoli lisci

I vincoli lisci sono un chiaro esempio di vincoli a lavoro totale virtuale nullo visto che il prodotto scalare tra la reazione vincolare $\vec{\psi}$ e lo spostamento virtuale è sempre nullo ($\vec{\psi} \cdot \delta \vec{r} = 0$), siccome $\vec{\psi} \perp \delta \vec{r} \forall t$.

Confrontiamo il lavoro reale con quello virtuale nei casi di vincoli scleronomi e reonomi:

1. Se i vincoli sono *scleronomi* sia lo spostamento virtuale $\delta \vec{r}$ che quello reale $d\vec{r}$ sono ortogonali alla reazione vincolare $\vec{\psi}$; perciò i lavori sono identicamente nulli $\forall t$.
2. Se invece i vincoli sono *reonomi* lo spostamento "reale" in genere non è ortogonale alla reazione vincolare $\vec{\psi}$ e perciò il prodotto scalare è di solito diverso da zero ($\vec{\psi} \cdot d\vec{r} \neq 0$); mentre lo spostamento virtuale, trattandosi di uno spostamento ottenuto *congelando* il tempo, è sempre ortogonale alla reazione vincolare.

3.1.2 Vincolo di rigidità

Sono un particolare tipo di vincoli olonomi, scleronomi e come vedremo sono a lavoro virtuale totale nullo. Prendiamo in considerazione due punti i e j che appartengono ad un corpo qualsiasi. Il vincolo di rigidità si traduce con la condizione che la distanza mutua tra il punto i e il punto j sia costante nel tempo; ovvero

$$d_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{cost.} \quad \forall t \text{ e } \forall (i, j) \in \text{corpo.}$$

In generale sappiamo che esistono due reazioni vincolari (il punto i esercita una forza $\vec{\psi}_{ji}$ sul punto j e viceversa) per cui

$$\vec{\psi}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i \neq 0 \quad \text{e} \quad \vec{\psi}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_j \neq 0 ,$$

condizione verificata tipicamente dai corpi rigidi sia per traslazioni che per rotazioni dello stesso, ma siccome $\vec{\psi}_{ij} + \vec{\psi}_{ji} = 0$ per il principio di azione e reazione e $\delta \vec{r}_i = \delta \vec{r}_j = \delta \vec{r}$, abbiamo che

$$\delta W = (\vec{\psi}_{ij} + \vec{\psi}_{ji}) \delta \vec{r} = 0 \quad \forall (i, j) \in \text{corpo.}$$

¹Precisiamo che il differenziale δ presente nella (3.8) non è un differenziale esatto.

Diamo ora un'osservazione importante che vale per tutti i tipi di vincolo che abbiamo considerato.

Osservazione 3.1. *Come si può osservare dal caso del vincolo di rigidità i lavori virtuali compiuti dalle singole reazioni vincolari sono in genere non nulli; questo fatto è estendibile ad un'ampia gamma di vincoli. Quello che ci interessa, come vedremo nei paragrafi successivi, affinché possa essere applicato il formalismo lagrangiano, è che si annulli il lavoro virtuale totale.*

3.1.3 Vincolo di puro rotolamento

Prendiamo ora in considerazione un disco di raggio R che rotola senza strisciare su una retta. Chiamiamo C l'unico punto di contatto tra la guida e il disco. Osserviamo che ad un certo $t = t_0$ il punto geometrico di contatto C coincide con C_0 sul disco, invece ad un tempo $t_0 + dt$ il punto C_0 viene a trovarsi in C_1 . Introduciamo ora l'angolo di rotazione φ avendo cura che gli assi rispetto cui sono misurati gli angoli siano *inerziali*. Per ipotesi noi sappiamo che il disco si muove di *puro rotolamento* e ciò vuol dire che C'_1 , che è la proiezione del punto C_1 sulla retta, può essere utilizzato per rappresentare il punto di contatto.

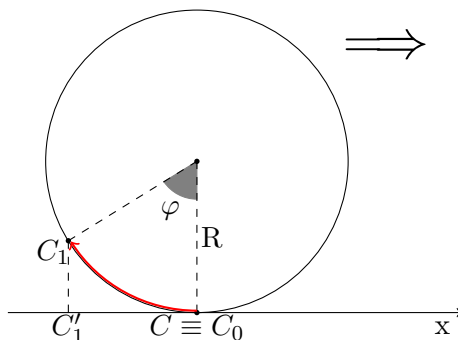


Figura 3.1: Puro rotolamento.

Poniamo ora $|CC'_1| = |(dx)\vec{i}|$ e l'arco con verso $C_0 \rightarrow C_1$ uguale a $-(Rd\varphi)\vec{i}$. Dato che il moto è di puro rotolamento abbiamo che

$$d\vec{r}_c = (dx - Rd\varphi)\vec{i} = 0 ;$$

dunque troviamo che $dx = Rd\varphi$, che a priori è l'equazione di un vincolo olonomo differenziale. Tale equazione è tuttavia integrabile e, ponendo la costante di integrazione pari a 0, otteniamo $x = R\varphi$ ossia una sola coordinata lagrangiana è sufficiente a rappresentare la posizione del disco in puro rotolamento. Il vincolo trovato è a lavoro virtuale totale nullo

$$\delta W = \vec{\psi} \cdot \delta\vec{r}_c = 0$$

poiché $\delta \vec{r}_c = 0 \forall t$: infatti se ogni $d\vec{r}_i' = 0$ (condizione di puro rotolamento) allora la differenza tra due oggetti nulli sarà ancora nulla. La suddetta condizione di puro rotolamento infine può essere espressa dicendo che la velocità del punto di contatto è istante per istante nulla:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c(t) = 0 \forall t.$$

3.2 Principio dei lavori virtuali

Enunciamo subito un importante principio che dal punto di vista pratico non è spesso utilizzabile, ma dal punto di vista teorico risulta molto importante poiché, dopo una sua riformulazione "dinamica", ci permetterà di scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange.

Principio 3.1 (dei lavori virtuali). *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di N punti materiali, soggetti a vincoli scleronomi, bilateri e a lavoro virtuale totale nullo², sia in equilibrio (assoluto) è che*

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r}_i\} \text{ ammissibile.}$$

Come possiamo osservare questo principio sembra anche molto intuitivo, poiché risulta naturale assumere, in un sistema statico dove tutte le forze vincolari compiono lavoro virtuale totale nullo, affinché ci sia equilibrio, che anche le forze attive (ovvero le forze rimanenti) compiano un lavoro nullo. Il verso dell'implicazione del principio dei lavori virtuali risulta perciò del tutto naturale, ma l'implicazione inversa non è sempre vera poiché si hanno anche le reazioni vincolari che rendono i $\{\delta \vec{r}_i\}$ non indipendenti tra loro.

Sotto l'ipotesi ulteriore di vincoli olonomi possiamo scrivere il vettore posizione \vec{r}_i in funzione delle coordinate generalizzate q_j ; perciò il principio può essere riscritto nel modo seguente

$$0 = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j,$$

scambiando le sommatorie otteniamo

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j; \quad (3.9)$$

dove abbiamo posto

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

²vale a dire tali che $\sum_{i=1}^N \vec{\psi}_i \cdot \delta \vec{r}_i$

che viene detta *j-esima forza generalizzata*: la possiamo vedere come la proiezione delle forze sulla *j*-esima coordinata generalizzata.

Dalla (3.9) si evince che il sistema è in equilibrio se e solo se $Q_j = 0 \forall j$.

Vediamo ora un'importante notazione che ha poco a che fare con l'argomento in questione, ma che verrà utilizzata in tutto il testo: la notazione di Einstein per le sommatorie. La convenzione è la seguente: ogni volta che un indice viene ripetuto due volte sotto una sommatoria, il simbolo \sum viene omesso. Tutte le volte che sono presenti due indici e non è presente la sommatoria verrà specificato. Riscriviamo l'equazione precedente con la notazione appena adottata

$$0 = \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = Q_j \delta q_j ,$$

come si può vedere la scrittura risulta più limpida.

Dopo questo breve excursus diamo un'importante applicazione del principio dei lavori virtuali.

3.2.1 Stazionarietà dell'energia potenziale

Assumiamo che ciascuna delle forze attive $\vec{F}_i^{(a)}$ sia *conservativa* e che derivi da un potenziale *ordinario* (ovvero che dipende solo dalla posizione e non dalla velocità). Affinché sia in equilibrio deve risultare

$$0 = \delta W^{(a)} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \forall j ;$$

ove $V = V(q_1, \dots, q_n)$ è l'energia potenziale totale. Dalle ipotesi precedenti deduciamo quindi che

$$dV = \frac{\partial V}{\partial q_j} dq_j = 0 ;$$

perciò si può affermare che, in caso di potenziali ordinari e forze conservative, il punto è in equilibrio se e solo se l'energia potenziale ammette punto stazionario. La classificazione di equilibrio stabile o instabile verrà affrontata più avanti nel capitolo delle oscillazioni.

3.3 Equazioni di Eulero-Lagrange

Il principio dei lavori virtuali enunciato precedentemente fa riferimento esclusivamente al caso statico; cerchiamo ora di ricavare un principio che ci permetta di vedere una situazione dinamica come una situazione di equilibrio completamente equivalente.

3.3.1 Principio di D'Alembert

Un sistema meccanico formato da N punti materiali è come se fosse in equilibrio sotto l'azione di $(\vec{F}_i + \vec{\psi})$ da cui si sottrae $\dot{\vec{p}}_i$; dove $\vec{p}_i \stackrel{\text{def}}{=} m_i \vec{v}_i$ (in questo caso non è sottointesa nessuna sommatoria). Questo è giustificato dal fatto che, grazie al secondo principio della dinamica

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{\psi}_i ,$$

possiamo scrivere che

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i + \vec{\psi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 ,$$

ma d'altronde la prerichiesta del principio dei lavori virtuali è che il lavoro delle reazioni vincolari sia nullo; quindi otteniamo, per ogni scelta dei $\{\delta \vec{r}_i\}$

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 , \quad (3.10)$$

che viene detto *Principio di D'Alembert*.

Da tale principio discendono le equazioni di Lagrange. Prendiamo in considerazione solo vincoli ideali, ovvero olonomi, bilateri e lavoro virtuale totale nullo.

Dimostrazione. Sia $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n; t)$, con $i = 1, \dots, N$, il vettore posizione dell' i -esima particella. Un suo spostamento virtuale allora sarà $\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ (non ci vuole $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ perché il tempo è congelato). Utilizziamo la notazione di Einstein ed omettiamo l'apice (a) per non appesantire eccessivamente la notazione. Considerando il primo addendo della (3.10) abbiamo

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \stackrel{\text{def}}{=} Q_j \delta q_j ,$$

con Q_j la j -esima forza generalizzata; per quel che riguarda il secondo invece

$$\dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = (m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j . \quad (3.11)$$

Rivediamo ora alcuni termini della (3.11). Tramite la regola di Leibnitz abbiamo che:

$$(m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) ,$$

dove

$$-m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = -m_i \vec{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right) .$$

Inoltre noi sappiamo che

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t},$$

dalla quale si evince un'importante proprietà: calcolando la derivata parziale di \vec{v}_i rispetto a \dot{q}_j , otteniamo

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Da queste considerazioni la (3.11) diventa

$$\left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \delta q_j.$$

Mettendo insieme i vari pezzi e ricordando che l'energia cinetica è sotto l'ipotesi di vincolo scleronomo $T = \frac{1}{2} m_i v_i^2$, abbiamo

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0,$$

ma sappiamo che $\{\delta q_j\}$ sono tra di loro indipendenti e allora valgono ($\forall j$) le equazioni

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \quad (3.12)$$

che vengono dette *equazioni di Eulero-Lagrange*. \square

Se come ulteriore richiesta poniamo che le forze attive siano *conservative* e derivabili da un potenziale *ordinario* $V(q_1, \dots, q_n)$ ($Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$) allora le (3.12) diventano

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

Ponendo $\mathcal{L} = T - V$ abbiamo infine che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

che sono n equazioni differenziali del secondo ordine accoppiate.

3.3.2 Invarianza in forma delle equazioni di Lagrange

Vediamo adesso alcune delle proprietà fondamentali delle equazioni di Eulero-Lagrange.

Prendiamo nello spazio delle configurazioni \mathcal{C}^n le coordinate generalizzate $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)$; perciò la lagrangiana sarà della forma

$$\bar{\mathcal{L}} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n; \dot{\bar{q}}_1, \dots, \dot{\bar{q}}_n; t) \equiv \bar{\mathcal{L}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

e le equazioni di Lagrange saranno

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} \right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{q}_j} = 0. \quad (3.13)$$

Introduciamo ora le funzioni di cambiamento di coordinate

$$q_k = q_k(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n; t)$$

che siano almeno di classe C^1 e invertibili, ovvero tali che

$$\det \left(\frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j} \right) \neq 0.$$

Sappiamo che la lagrangiana è una funzione *scalare* e perciò il suo valore non può dipendere dalla scelta delle coordinate in cui la esprimiamo (*uguaglianza in valore*):

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \mathcal{L}(q(\bar{q}, t), \dot{q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), t) \quad \forall t.$$

Vogliamo ora dimostrare che la nuova lagrangiana \mathcal{L} soddisfi le equazioni di Lagrange. Incominciamo esplicitando le derivate presenti nella (3.13):

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\bar{q}}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j};$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la proprietà

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k = \frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j} \frac{d\bar{q}_j}{dt} = \frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j} \dot{\bar{q}}_j;$$

infine derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \bar{q}_j}$$

Concentriamoci ora sull'altra derivata

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \bar{q}_j}.$$

Ricomponendo l'equazione di Lagrange otteniamo

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right] \frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j} = 0 \quad (\text{ricordiamo che } \sum_k \text{ è sottintesa});$$

siccome la matrice $\left(\frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j}\right)$ è *non singolare*, allora tutte le derivate sono linearmente indipendenti e perciò

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad \forall k .$$

Siccome abbiamo verificato che anche \mathcal{L} verifica le equazioni di Eulero-Lagrange segue immediatamente che le equazioni di Lagrange sono *invarianti in forma*.

Capitolo 4

Leggi di conservazione

4.1 Momento coniugato

Come abbiamo potuto osservare fino a questo momento, le equazioni del moto sono equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine; la loro risoluzione sarebbe semplificata se esistessero funzioni del tipo

$$f(q, \dot{q}) \Big| \frac{d}{dt} f(q(t), \dot{q}(t), t) = 0 \quad \forall t ,$$

quindi $f(q(t), \dot{q}(t)) = \text{costante} = f(q(0), \dot{q}(0))$.

Definizione 4.1 (momento coniugato). *Si definisce momento coniugato alla coordinata q_k la quantità*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{\text{def}}{=} p_k \tag{4.1}$$

Osserviamo che se il potenziale fosse ordinario, $V = V(q_1, \dots, q_n)$ e quindi $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = p_k$. Da questo discende che l'equazione di Lagrange diventa semplicemente

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} .$$

Supponiamo ora che la lagrangiana sia ciclica, ossia che non dipenda da una particolare coordinata q_j in modo tale che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 = \frac{dp_j}{dt}$: essa è una *legge di conservazione* e p_j è detto *integrale primo di moto per la j -esima equazione*.

Definizione 4.2 (coordinata di traslazione). *Se una coordinata q_j è di traslazione, il suo momento coniugato è la componente della quantità di moto in direzione della traslazione.*

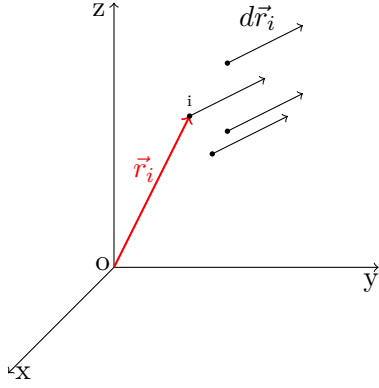


Figura 4.1: Traslazione di punti.

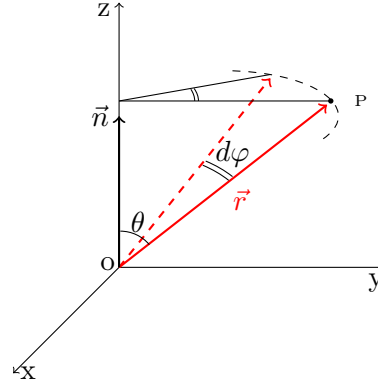


Figura 4.2: Rotazione.

Presi N punti materiali, identifichiamo l' i -esimo con il vettore posizione $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n)$: q_j è di traslazione se un movimento infinitesimo lungo questa coordinata corrisponde ad una traslazione di tutti i punti del sistema in una direzione \vec{n} , con \vec{n} versore, quindi $d\vec{r}_i = \vec{n}dq_j$. Inoltre osserviamo che

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_i(q_1, \dots, q_j + dq_j, \dots, q_n) - \vec{r}_i(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n)}{dq_j} = \vec{n},$$

che quindi corrisponde all'asse coordinato dello spazio delle configurazioni lungo cui avviene la traslazione.

Supponiamo come al solito che il potenziale sia ordinario, in modo che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ e quindi che l'equazione di Lagrange diventi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0.$$

La prima derivata parziale equivale a

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n} = p_j : \end{aligned}$$

il momento coniugato alla coordinata lungo la quale avviene la traslazione è dunque il prodotto scalare tra la quantità di moto totale \vec{p} e il versore della traslazione \vec{n} . Ricordiamo che $\frac{\partial V}{\partial q_j} = -Q_j$ e che

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i \right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d\vec{n}}{dt} = 0$$

siccome \vec{n} è costante nel tempo.

Ricomponendo le varie derivate ed inserendole nell'equazione di Lagrange otteniamo

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{n}) = Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \vec{n},$$

ritrovando così un notevole risultato presente anche nel formalismo newtoniano:

$$\frac{d(\vec{p} \cdot \vec{n})}{dt} = R^{(ext)} \cdot \vec{n} \quad (4.2)$$

in cui osserviamo che $\sum_i \vec{F}_i^{(a)}$ sono forze attive che si compensano tra di loro se interne, lasciando solo una risultante esterna.

Ricapitolando, se \mathcal{L} è ciclica, ovvero non dipende da una q_j , e tale q_j è di traslazione allora $\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$, quindi p_j si conserva.

Definizione 4.3 (coordinata di rotazione). *Se una coordinata q_j è di rotazione, il suo momento coniugato è la componente del momento angolare dell'intero sistema lungo l'asse di rotazione.*

Con riferimento alla figura 4.2, chiamiamo l'angolo della rotazione infinitesima $d\varphi$ intorno all'asse z ed osserviamo che $|\vec{r} + d\vec{r}| = |\vec{r}|$ siccome il punto materiale identificato dal vettore posizione deve stare sempre alla stessa distanza dall'origine: è immediato notare che quindi, detto θ l'angolo tra il vettore posizione e l'asse di rotazione, $|d\vec{r}| = |\vec{r}| \sin \theta d\varphi$, ovvero $d\vec{r} = (\vec{n} \times \vec{r})d\varphi$ e quindi, siccome in un moto di questo tipo la coordinata angolare è una coordinata generalizzata, possiamo scrivere $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{n} \times \vec{r}_i$.

Vediamo come diventa l'equazione di Lagrange in queste ipotesi.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \vec{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i \right) = \vec{n} \cdot \vec{L}^{(tot)}. \end{aligned}$$

La seconda derivata parziale che calcoliamo è

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{n} \cdot (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{r}_i) = 0. \end{aligned}$$

Infine, sapendo che

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = -Q = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \vec{n} \cdot \vec{M}^{(tot)}$$

e quindi ricomponendo tutte le derivate otteniamo una relazione simile a quella ricavata per le traslazioni e anch'essa riscontrabile nel formalismo newtoniano,

$$\frac{d(\vec{n} \cdot \vec{L}^{(tot)})}{dt} = \vec{n} \cdot \vec{M}^{(ext)}, \quad (4.3)$$

dove $\vec{M}^{(ext)}$ è la risultante del momento delle forze esterne.

4.2 Conservazione hamiltoniana

Nella precedente introduzione alle costanti del moto abbiamo osservato le conseguenze che si presentano se esistono coordinate cicliche, ossia se esistono leggi di conservazione del tipo $\frac{dp_k}{dt} = 0$. Cosa si otterrebbe, però, calcolando $\frac{d\mathcal{L}}{dt}$? Innanzitutto mettiamoci nel caso di potenziali ordinari, anche se in generale si potrebbe considerarli dipendenti pure dalle velocità, così da definire $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q})$; la sua derivata totale rispetto al tempo diventa

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + p_k \frac{d\dot{q}_k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

dove è sottintesa la sommatoria sull'indice k . Ricordando che valgono le equazioni di Lagrange e che quindi $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{dp_k}{dt}$ possiamo sostituire questa identità nella precedente derivata temporale, ottenendo

$$\frac{d}{dt} [p_k \dot{q}_k] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}] = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (4.4)$$

dove, continuiamo a sottolinearlo, è sottintesa la sommatoria su k .

Definiamo il termine tra parentesi *hamiltoniana* $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$ ed osserviamo che se \mathcal{L} non dipende *esplicitamente* dal tempo, \mathcal{H} è una costante del moto.

Imponiamo come ulteriore condizione, oltre all'ordinarietà del potenziale, che i vincoli siano scleronomi, implicando che l'energia cinetica sia una funzione omogenea quadratica delle \dot{q} come dimostrato dall'equazione (2.6), in particolare $T = A_{k,j}(q, t) \dot{q}_k \dot{q}_j$. In \mathbb{R}^N una funzione si dice omogenea di grado k se $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$; il teorema di Eulero afferma che per una tale funzione vale $\sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k f$.

Con tali ipotesi, osserviamo che significato fisico assume \mathcal{H} ; grazie all'ipotesi dei potenziali ordinari abbiamo che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$, quindi

$$\mathcal{H} = p_k \dot{q}_k - \mathcal{L} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L} = 2T - (T - V) = T + V = E \quad (4.5)$$

dove si è usato il teorema di Eulero nel secondo passaggio siccome T è una funzione omogenea del secondo ordine, mentre E è l'energia meccanica totale del sistema.

Come è stato detto sopra, quando la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, l'hamiltoniana si conserva. Solo nelle ipotesi aggiuntive espresse precedentemente, $\mathcal{H} = E$ e quindi anche E si conserva, ma esistono casi in cui si conserva \mathcal{H} e non E .

4.3 Applicazione del formalismo lagrangiano

Vediamo adesso un esempio in cui si applica il formalismo lagrangiano, ossia nei moti centrali caratterizzati da una forza $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, con r modulo del vettore posizione.

Grazie al formalismo newtoniano avremmo potuto affermare, in questo particolare caso, che \vec{F} è irrotazionale, quindi $\exists V = V(r) | \vec{F} = -\nabla V$; per quanto concerne la dinamica, $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \Rightarrow \vec{r} \times \ddot{\vec{x}} = 0 \forall t$. Il momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ si conserva, infatti abbiamo che

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times (m\vec{a}) = 0.$$

Infine la forza presa in esame è conservativa, perciò $E = T + V$ si conserva: abbiamo quindi due costanti del moto, \vec{L} ed E .

In una trattazione in termini lagrangiani, invece, sono utilizzati meno concetti per giungere alle stesse conclusioni.

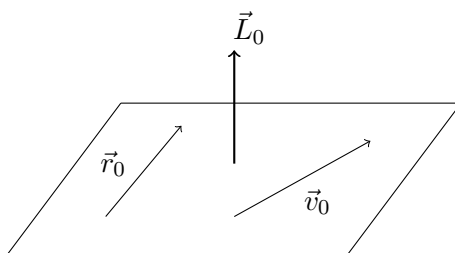


Figura 4.3: Moto planare.

Diciamo $\vec{L}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 \neq 0$ perchè altrimenti il moto diventerebbe unidimensionale e non siamo interessati a questo semplice caso. Il punto P di massa m che si muove in tale campo di forze centrali ha in generale tre gradi di libertà, ma siccome $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, il moto sarà confinato dinamicamente in un piano e quindi i gradi di libertà scenderanno a due. Questa semplificazione dello studio del moto risulta ancor più comoda se si usano le coordinate polari: $V = V(\rho)$ e $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - V(\rho)$. Possiamo osservare che \mathcal{L} non dipende esplicitamente da t , perciò \mathcal{H} si conserva ed inoltre, essendo

il potenziale ordinario, sussiste la corrispondenza $\mathcal{H} = E$. Notiamo anche che non c'è dipendenza da θ (solo da $\dot{\theta}$), perciò tale coordinata è ciclica; per quanto visto nelle sezioni precedenti, allora, $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} = L_z$ è una costante del moto. A questo punto si può osservare che esistono dunque due modi per mostrare che il moto è planare: il primo si basa sul fatto che se il momento angolare si conserva allora esso sarà diretto ortogonalmente al piano in cui si svolge il moto; con il secondo modo basta osservare che θ è una coordinata di rotazione e che quindi p_θ è la componente di \vec{L} lungo l'asse perpendicolare al piano.

4.4 Simmetrie

Introduciamo ora l'importante nozione di *simmetria* alla quale, grazie al teorema di Noether, potremo far corrispondere una costante del moto e quindi facilitare la risoluzione delle equazioni del moto di un sistema di punti.

Definizione 4.4 (simmetria). *Un sistema meccanico possiede una simmetria se è invariante rispetto una classe di trasformazioni che formano un gruppo.*

Ricordiamo che un gruppo è un insieme non vuoto con una operazione binaria (come somma o prodotto), la proprietà associativa, l'elemento neutro e l'inverso.

Sappiamo che la \mathcal{L} è invariante in valore, perciò applicando un cambiamento di coordinate abbiamo l'uguaglianza

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t) .$$

L'invarianza per simmetria è invece qualcosa di più specifico, ossia una proprietà che mantenga la stessa forma funzionale della vecchia lagrangiana e, siccome la struttura delle equazioni di Lagrange viene mantenuta, come già dimostrato nel paragrafo 3.3.2, l'invarianza per simmetria *conduce ad equazioni del moto identiche* con l'unica differenza delle coordinate generalizzate scelte; nel caso in cui la lagrangiana fosse già invariante si avrebbe l'uguaglianza $\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t)$, cioè le due lagrangiane sono la stessa funzione. Tuttavia questo è un caso troppo restrittivo in una trattazione generale come vorremmo studiare e a dimostrazione di ciò proponiamo un controesempio.

Supponiamo che il punto materiale non sia soggetto a forze quindi la sua lagrangiana sarà uguale all'energia cinetica T e scriviamo tale espressione in coordinate cartesiane e polari: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)$. Le leggi del moto, nei due casi, saranno

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} m\ddot{\rho} = 0 \\ m\rho^2\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

che danno quindi lo stesso risultato, ovviamente, ma non sono identiche in forma.

Proposizione 4.1. *La condizione che porta ad equazioni del moto identiche per ogni t è*

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) + \frac{d\Lambda(q', t)}{dt} \quad (4.7)$$

con $\Lambda(q', t)$ funzione regolare.

L'utilità di tale funzione è quindi di rendere la *lagrangiana* invariante in forma e allo stesso tempo di lasciare immutata la forma delle equazioni di Lagrange; dimostriamolo.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che la derivata totale di Λ può essere scritta come

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial\Lambda}{\partial q'_k} \dot{q}'_k + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}.$$

Procediamo come al solito alla derivazione dei due addendi dell'equazione di lagrange, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{q}'_l} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q'_l} = 0$, e otteniamo

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q'_l} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'_l} + \frac{\partial}{\partial q'_l} \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q'_k} \dot{q}'_k + \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'_l} + \left(\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q'_l \partial q'_k} \dot{q}'_k \right) + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial q'_l \partial t}.$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{q}'_l} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}'_l} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}'_l},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{q}'_l} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}'_l} \right) + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial q'_l \partial q'_k} \dot{q}'_k + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial q'_l \partial t}$$

Ricomponendo l'equazione abbiamo che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{q}'_l} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q'_l} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}'_l} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'_l} = 0.$$

□

4.5 Trasformazioni infinitesime e teorema di Noether

Prendiamo ora in considerazione un particolare genere di trasformazioni, quelle dipendenti da un parametro (che identificheremo con $\alpha \in \mathbb{R}$) e infinitesime.

Detto appunto $\alpha \in (-a, a)$ supponiamo che la trasformazione $q'_k = q'_k(q_1, \dots, q_n; \alpha; t)$ con $k = 1, \dots, n$ sia differenziabile ed invertibile $\forall \alpha$ e

che esista un certo α_0 tale che $q'_k(q_1, \dots, q_n; \alpha_0; t) = q_k$, ossia a cui corrisponda la trasformazione identità; queste funzioni formano un gruppo per successiva applicazione:

$$\begin{aligned} q'_k &= q'_k(q; \alpha_1; t) \\ q''_k &= q''_k(q'; \alpha_2; t) = q''_k(q; \alpha_1 + \alpha_2; t) . \end{aligned}$$

In particolare una variazione infinitesima del parametro è $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$ a cui corrisponde la trasformazione $q'_k = q_k + \delta q_k \forall k = 1, \dots, n$ e dove il termine $\delta q_k = \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \delta\alpha = q'_k - q_k$ è un incremento virtuale. Osserviamo che è stato usato il termine δ e non d nell'incremento, siccome nella nostra trattazione il tempo è considerato alla stregua di un parametro e quindi è di interesse osservare solo la variazione δq_k .

Supponiamo ora che la trasformazione sia di simmetria, quindi grazie alla (4.7) possiamo scrivere l'uguaglianza

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) + \frac{d\Lambda(q + \delta q, t)}{dt} . \quad (4.8)$$

Non devono preoccupare le notazioni leggermente diverse: infatti grazie all'invarianza in *valore* della lagrangiana, $\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q'(q, t), \dot{q}'(q, \dot{q}, t), t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ motiva il membro a sinistra, la trasformazione $q' = q + \delta q$ motiva quello a destra.

Sviluppiamo al primo ordine l'equazione ed otteniamo

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right] + \frac{d}{dt} \left(\Lambda(q, t) + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \delta q_k \right) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = 0 \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \delta q_k = \delta \Lambda .$$

Osserviamo che il termine

$$\frac{d}{dt} (\Lambda(q, t)) = 0$$

perchè il tempo è congelato e sfruttando il teorema di Leibnitz abbiamo che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k ,$$

e sostituendo nell'equazione e riordinando, otteniamo:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \delta \Lambda \right] = 0 .$$

Siccome valgono le equazioni di Lagrange, la prima parentesi è nulla, quindi dal calcolo è stata ricavata una costante del moto, siccome

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \delta \Lambda \right] = 0 \quad (4.9)$$

Tale equazione è espressione del cosiddetto

Teorema 4.1 (di Noether). *Ad ogni simmetria corrisponde una costante del moto.*

La coordinata ciclica è un particolare caso del teorema di Noether, perchè supponendo che vi sia una sola q_j ciclica, la trasformazione è del tipo

$$\begin{cases} q_j \longrightarrow q_j + \delta q_j \\ q_k \longrightarrow q_k \end{cases}$$

$\forall k \neq j$. Siccome q_j è ciclica le due lagrangiane di (4.8) non ne dipendono e sarà così anche per Λ . In tal caso $\delta\Lambda = 0$, quindi $\frac{d}{dt}(p_j \delta q_j) = \frac{d}{dt}\left(p_j \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \delta \alpha\right) = 0$ che implica la conservazione di p_j , come già sapevamo.

Capitolo 5

Oscillazioni

Nello studio dei sistemi assume grande importanza ed interesse la ricerca delle condizioni di equilibrio, stabili o meno, e tale analisi porta a risultati molto utili anche dal punto di vista pratico.

5.1 Equilibrio stabile

Consideriamo un sistema con n gradi di libertà e facciamo le seguenti ipotesi:

- Siano i vincoli olonomi, bilateri e a lavoro virtuale nullo.
- Le forze attive siano conservative e i potenziali ordinari.
- Si considerino vincoli scleronomi (fissi).

Definizione 5.1 (Equilibrio in n gradi di libertà). *In tali condizioni, le soluzioni di*

$$\frac{\partial V(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_k} = 0 \quad (5.1)$$

si chiamano configurazioni di equilibrio.

Infatti, siccome l'ipotesi è che $\delta W = 0$, ciò implica che

$$dV = 0 = \frac{\partial V(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_k} dq_k \iff \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad \forall k .$$

Supponiamo che esista una soluzione di (5.1) e denotiamola con $\Gamma = (q_{01}, \dots, q_{0n})$,

che quindi soddisfa l'equazione $\left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \forall k$.

Introduciamo ora una nuova grandezza fisica, gli *scostamenti*, di cui faremo uso nella nostra trattazione circa l'equilibrio dei sistemi. Facendo una shift delle coordinate diciamo $q_j \rightarrow \eta_j \stackrel{\text{def}}{=} q_j - q_{0j}$, ossia pratichiamo una variazione delle coordinate generalizzate intorno alla posizione di equilibrio Γ . A questo punto possiamo enunciare la definizione di configurazione stabile:

Definizione 5.2 (Equilibrio stabile). Γ è una configurazione di equilibrio stabile se, comunque fissato $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che per ogni scelta dei dati iniziali $\eta_k(0)$ ed $\dot{\eta}_k(0)$ tali che $|\eta_k(0)| < \delta$ e $|\dot{\eta}_k(0)| < \delta$, succeda che $|\eta_k(t)| < \varepsilon$ e $|\dot{\eta}_k(t)| < \varepsilon \quad \forall t$.

Enunciamo ora un criterio necessario per la stabilità, detto

Teorema 5.1 (di Lagrange-Dirichlet). Se $V(q_1, \dots, q_n)$ ha in Γ un minimo stretto allora Γ è di equilibrio stabile.

Definiamo ora per comodità l'hessiana di V nel punto Γ nel seguente modo

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right) \Big|_{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} V_{jk} \quad (5.2)$$

ed osserviamo che la condizione espressa dal teorema di Lagrange-Dirichlet si traduce in $\det V_{jk} > 0$ e $V_{jj} > 0 \quad \forall j$ elemento della diagonale¹. Se $\det V_{jk} \neq 0$ e V non ha un minimo stretto allora il sistema è in una configurazione instabile, se invece $\det V_{jk} = 0$ i casi sono dubbi e non si possono fare conclusioni senza altre informazioni.

Come sappiamo, la lagrangiana del sistema sarà $\mathcal{L} = T(q, \dot{q}) - V(q)$, il cui ultimo termine scritto in funzione degli scostamenti è

$$V(q_{01} + \eta_1, \dots, q_{0n} + \eta_n) = V(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \frac{\partial V}{\partial q_j} \Big|_{\Gamma} \eta_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_{\Gamma} \eta_j \eta_k + \mathcal{O}(\eta^3),$$

ma siccome l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva, poniamo il primo termine al secondo membro 0 e grazie all'ipotesi che Γ sia di equilibrio, anche il secondo termine è nullo. Scriviamo quindi $V(\eta) = \frac{1}{2} V_{jk} \eta_j \eta_k \equiv V^*$ a meno di ordini superiori.

Procediamo ora in modo tale da scrivere in maniera simile anche l'energia cinetica: grazie all'ipotesi di vincoli scleronomi l'energia cinetica è una funzione quadratica nelle \dot{q} , quindi $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k$. Osservato che $\dot{\eta}_j = \dot{q}_j$ e dette $m_{jk}(q)$ le funzioni che comprendono anche le masse,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_{jk}(\eta) \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k = \frac{1}{2} m_{jk}(q_{01} + \eta_1, \dots, q_{0n} + \eta_n) \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \sim \\ &\sim \frac{1}{2} m_{jk}(\Gamma) \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \stackrel{\text{def}}{=} T_{jk} \frac{1}{2} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \equiv T^*. \end{aligned}$$

La lagrangiana per le piccole oscillazioni è allora $\mathcal{L}^* = \frac{1}{2} T_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - \frac{1}{2} V_{jk} \eta_j \eta_k = T^* - V^*$, ovvero una somma di due forme bilineari simmetriche $n \times n$. Scriviamo ora l'equazione di Lagrange ed usiamo l'indice i per non confondere

¹Ricordiamo infatti che la matrice hessiana è reale e simmetrica (grazie al teorema di Schwarz) e quindi sempre diagonalizzabile. Affinchè sia definita positiva, dall'algebra lineare, è necessario che ogni suo minore sia definito positivo e quindi in particolare anche ogni elemento della diagonale.

la notazione:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_{\eta_i}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_{\eta_i}} = 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\eta}_i} \right) + \frac{\partial V^*}{\partial \eta_i} . \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \eta_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_i} (V_{jk} \eta_j \eta_k) = \frac{1}{2} \left(V_{jk} \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_i} \eta_k + V_{jk} \eta_j \frac{\partial \eta_k}{\partial \eta_i} \right) = \frac{1}{2} (V_{ik} \eta_k + V_{ji} \eta_j) ,$$

grazie al fatto che la derivata parziale di η_j rispetto η_i è il delta di Kronecker δ_{ji} . Siccome sono sottointese le sommatorie per j e per k è lecito scambiare gli indici della matrice V_{ji} e cambiare il pedice j con k , ottenendo così

$$\frac{1}{2} (V_{ik} \eta_k + V_{ij} \eta_j) = \frac{1}{2} (V_{ik} \eta_k + V_{ik} \eta_k) = V_{ik} \eta_k .$$

Facciamo ora gli stessi passaggi per T^* e otteniamo che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\eta}_i} \right) = T_{ik} \ddot{\eta}_k .$$

Ricomponendo l'equazione (5.3) troviamo

$$\sum_{k=1}^n T_{ik} \ddot{\eta}_k + V_{ik} \eta_k = 0 . \quad (5.4)$$

L'equazione (5.4) rappresenta n oscillatori armonici accoppiati siccome V_{ik} è definita positiva.

5.2 Metodo della soluzione di prova

Dall'analisi sappiamo che la soluzione dell'equazione (5.4) è del tipo $\eta_j(t) = C a_j e^{-i\omega t}$ detta soluzione di prova in forma complessa e dove $C a_j \in \mathbb{C}$ rappresenta l'ampiezza del moto. Inserendo tale soluzione nell'equazione (5.4) otteniamo, cambiando indice,

$$\sum_{j=1}^n T_{kj} \ddot{\eta}_j + V_{kj} \eta_j = \sum_{j=1}^n [-T_{kj} \omega^2 C a_j + V_{kj} C a_j] e^{-i\omega t} = 0 ,$$

e siccome l'esponenziale non si annulla mai, la parentesi quadra deve essere nulla; inoltre osserviamo che anche $C \neq 0$ altrimenti non si avrebbe ampiezza e quindi non ci sarebbe moto. L'equazione differenziale (5.4) si riduce quindi a

$$\sum_{j=1}^n V_{kj} a_j - \omega^2 T_{kj} a_j = 0 . \quad (5.5)$$

La condizione affinché esista soluzione è che l'equazione secolare associata abbia soluzioni e che il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots & V_{1n} - \omega^2 T_{1n} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \dots & V_{2n} - \omega^2 T_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} - \omega^2 T_{n1} & V_{n2} - \omega^2 T_{n2} & \dots & V_{nn} - \omega^2 T_{nn} \end{bmatrix}$$

sia uguale a 0.

Supponiamo ora che le soluzioni, ovvero tutti i possibili valori dell'incognita ω^2 , siano n e che le radici, cioè le soluzioni stesse, del polinomio siano tutte distinte: $\omega_{(1)}^2, \omega_{(2)}^2, \dots, \omega_{(n)}^2$, dette *frequenze di vibrazione libera* o *frequenze di risonanza*. A questo punto sostituiamo ogni radice nell'equazione (5.5) per riuscire ad ottenere l'autovettore a_j corrispondente alla frequenza $\omega_{(j)}$.

Analizziamo ora un caso particolare.

Supponiamo che

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{\eta}_i)^2,$$

ovvero che $T_{jk} = \delta_{jk}$, argomenti della matrice identità: con tale ipotesi risulta che l'equazione (5.5) si riduce a

$$\sum_{j=1}^n V_{kj} a_j = \omega^2 a_k$$

ed osservato che a_j è la componente di un n -vettore possiamo scrivere tale espressione nella forma matriciale

$$\mathbf{V}\vec{a} = \omega^2 \vec{a}.$$

Abbiamo quindi che $\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = 0$ e in questo modo possiamo determinare le soluzioni $\omega_{(k)}^2$: sussiste infatti la relazione di similitudine

$$\tilde{A}\mathbf{V}A = \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{(n)} \end{bmatrix} = \lambda \mathbb{I}, \quad (5.6)$$

dove A è la matrice degli autovettori e \tilde{A} è la sua trasposta, per le quali vale la relazione $A\tilde{A} = \mathbb{I}$ essendo ortogonali.

È possibile generalizzare il caso particolare, infatti vale l'equazione

$$\mathbf{V}\vec{a} = \lambda \mathbf{T}\vec{a}$$

che è il caso generale per un solo autovettore $\lambda = \omega^2$. Al lettore volenteroso è lasciata la dimostrazione del fatto che la matrice A è quella tale che diagonalizza simultaneamente \mathbf{V} e \mathbf{T} , di cui si è già accennato con (5.6): si trova che $\tilde{A}\mathbf{T}A = \mathbb{I}$. Dalle equazioni del moto (5.5) risulta chiaro che la soluzione più generale di ognuna di esse è una combinazione lineare delle soluzioni trovate e sarà quindi del tipo

$$\eta_j(t) = \sum_{k=1}^n C_k a_{jk} e^{-i\omega_{(k)} t} \quad (5.7)$$

ove $C_k \in \mathbb{C}$ e di cui siamo interessati solo alla parte reale che descrive il moto effettivo dell'oscillatore:

$$\operatorname{Re}(\eta_j(t)) = \sum_{k=1}^n f_k a_{jk} \cos(\omega^{(k)}t + \Phi^{(k)}) \quad (5.8)$$

detta $f_k \in \mathbb{R}$ la parte reale di C_k . Ciascuna $\eta_j(t)$ rappresenta un moto molteplicemente periodico, con periodi dati da $\omega^{(k)}$ e a meno che le frequenze siano tali che $\frac{\omega^{(k)}}{\omega^{(k')}} \in \mathbb{Z}$, lo scostamento $\eta_j(t)$ non varierà su un singolo periodo; questo vuol dire che in generale $\eta_j(t) \neq \eta_j(t+T)$.

5.3 Modi normali

I moti $\eta_j(t)$ accoppiati si possono disaccoppiare ed ottenere i cosiddetti *modi normali* e per trovarne le forme funzionali operiamo il cambiamento di coordinate $\xi_j = \xi_j(\eta_1, \dots, \eta_n)$ tale che $\eta_j = \sum_i a_{ij} \xi_i$: verifichiamo che tale trasformazione disaccoppi i moti.

In notazione matriciale abbiamo che

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \eta = A\xi = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}; \quad \tilde{\eta} = (\tilde{A}\xi) = \tilde{\xi}\tilde{A}$$

e con questa notazione più comoda scriviamo l'energia potenziale e l'energia cinetica del moto oscillante.

$$V^* = \frac{1}{2} \tilde{\eta} \mathbf{V} \eta = \frac{1}{2} \tilde{\xi} \tilde{A} \mathbf{V} A \xi = \frac{1}{2} \tilde{\xi} \boldsymbol{\lambda} \xi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda^{(k)} (\xi_k)^2$$

ed osservato che $\dot{\eta} = A\dot{\xi}$ perché la matrice A non dipende dal tempo, abbiamo che

$$T^* = \frac{1}{2} \tilde{\eta} \mathbf{T} \dot{\eta} = \frac{1}{2} \tilde{\xi} \tilde{A} \mathbf{T} A \dot{\xi} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\dot{\xi}_k)^2.$$

Grazie a queste considerazioni possiamo scrivere la lagrangiana del sistema

$$\mathcal{L}^*(\xi, \dot{\xi}) = \sum_{k=1}^n \mathcal{L}_k(\xi, \dot{\xi}) \quad \text{ove} \quad \mathcal{L}_k = \frac{1}{2} (\dot{\xi}_k)^2 - \frac{1}{2} \lambda^{(k)} (\xi_k)^2 \quad (5.9)$$

e dall'equazione di Lagrange otteniamo l'equazione del moto e la sua soluzione:

$$\ddot{\xi}_k + \lambda^{(k)} \xi_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_k(t) = f_k \cos(\omega^{(k)}t + \Phi^{(k)}).$$

Risulta infine evidente che ogni singola lagrangiana \mathcal{L}_k dell'equazione (5.9) rappresenti *un* oscillatore armonico monodimensionale con pulsazione $\omega^{(k)}$ e fase $\Phi^{(k)}$ e ciò vuol dire che il moto molteplicemente periodico (5.8) è stato così disaccoppiato nei suoi modi normali.

Capitolo 6

Il problema dei due corpi

In questo capitolo ci occuperemo della dinamica di due corpi soggetti ad un campo di forze diretto come la loro congiungente: tale analisi sarà molto utile per capire il moto effettivo che ad esempio segue un pianeta nel nostro Sistema Solare e ci fornirà la ben note tre leggi di Keplero.

6.1 Riduzione del problema

Fissiamo un sistema di riferimento inerziale e consideriamo due corpi materiali puntiformi *isolati* P_1 e P_2 rispettivamente di masse m_1 e m_2 soggetti ad una forza interna conservativa diretta lungo la loro congiungente; chiamiamo in tale sistema \vec{R}_1 e \vec{R}_2 i vettori posizione dei due punti e $\overline{P_1P_2}$ la distanza tra i due. Procediamo con il conteggio dei gradi di libertà che immediatamente si capisce essere 3 per ogni corpo, quindi 6 totali; sfruttando le ipotesi di lavoro vediamo che è possibile trattare lo stesso problema in modo semplificato e abbassare tale numero. Infatti il sistema dei due corpi, essendo isolato, conserva la sua quantità di moto e quindi il centro di massa $C.M.$ si muoverà di moto inerziale:

$$\vec{R}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0, \quad \text{ove} \quad \vec{R} = \frac{\vec{R}_1 m_1 + \vec{R}_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Poniamo dunque la terna di riferimento inerziale nel centro di massa il quale grazie alla formula che ben conosciamo è sempre facilmente identificabile ed osserviamo che questa scelta ci porta a ridurre i gradi di libertà del sistema a 3, ossia "eliminando" le coordinate del $C.M.$; per portare a termine questa semplificazione però è necessario trovare anche un termine di massa da associare al centro di massa, che non può essere la banale somma di m_1 e di m_2 .

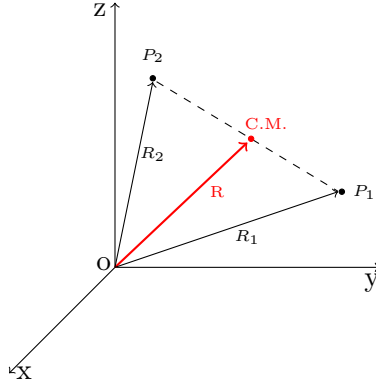


Figura 6.1: Problema dei due corpi

Definiamo quindi $\vec{r}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{R}_1 - \vec{R}$ e $\vec{r}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{R}_2 - \vec{R}$ le distanze dei due punti dal centro di massa e $\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. L'energia cinetica del sistema è:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{\dot{r}_1^2 m_1^2}{m_2^2} \right)$$

ove abbiamo sfruttato il fatto che $\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0$ nel sistema di riferimento del centro di massa stesso e che $\dot{\vec{r}}_2 = -\frac{\dot{\vec{r}}_1 m_1}{m_2}$. Raccogliamo i termini comuni dei due addendi nel calcolo dell'energia cinetica e inseriamo l'identità

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \frac{m_1}{m_2} = \vec{r}_1 \frac{m_2 + m_1}{m_2}$$

così da ottenere

$$\frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = \frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 \left(\frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \right) \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$$

ove abbiamo posto $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ quantità detta massa ridotta che è proprio il termine di massa che cercavamo.

La lagrangiana del sistema risulta essere $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - V(r)$ e siccome siamo in un campo di forze centrali sappiamo che si conserva il momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}$: possiamo ulteriormente ridurre i gradi del sistema a 2, poiché questa proprietà restringe il moto in un piano. Sfruttando le coordinate polari (ρ, φ) si ha

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right) - V(\rho). \quad (6.1)$$

Infine supponiamo che $\vec{L} \neq 0$ in modo da evitare il caso degenero.

Come abbiamo già avuto modo di osservare nel paragrafo 4.3 nel caso di

forze centrali l'hamiltoniana si conserva, coincide con l'energia totale e vale

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\mu\rho^2\dot{\varphi}^2 + V(\rho) = E$$

e ricordando che il momento angolare resta costante, $l \stackrel{\text{def}}{=} \mu\rho^2\dot{\varphi}$, così da avere per costruzione

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{l^2}{2\mu\rho^2} + V(\rho) = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \tilde{V}(\rho)$$

ove $\tilde{V}(\rho)$ è detta energia potenziale efficace ed è somma dell'energia potenziale fittizia e di V .

Da ora in poi restringiamo i casi presi in esame a quelli kepleriani in cui $V(\rho) = -\frac{k}{\rho}$: $E = T + \tilde{V}$ si conserva e siccome è sempre vero che $T \geq 0$, allora $(E - \tilde{V}) \geq 0$.

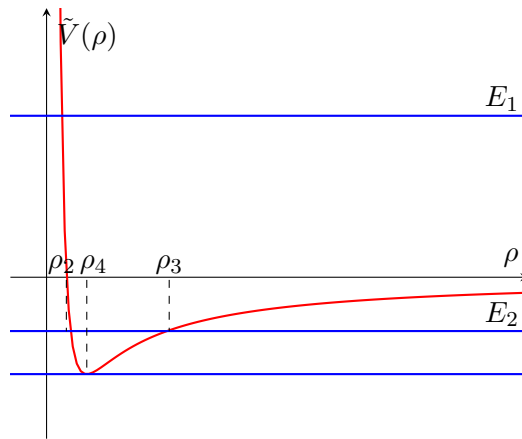


Figura 6.2: Energia potenziale \tilde{V} e linee rette corrispondenti ai diversi valori costanti di E .

Un corpo con una certa energia cinetica T può muoversi in diversi modi a seconda della sua energia E perché l'energia potenziale efficace, a seconda dei valori che assumerà, determinerà qualitativamente il moto radiale:

- Se $E = E_1 > 0$ allora $\exists \rho_1 / \rho(t) \geq \rho_1$ e il moto non è confinato.
- Se $E = 0$ il moto continua a non essere confinato.
- Se $E = E_2 < 0$, allora $\rho_2 \leq \rho(t) \leq \rho_3$, situazione che traduce moti confinati ma non necessariamente orbite chiuse.

- Se E corrisponde al minimo di \tilde{V} la distanza dal centro di forza è costantemente ρ_4 ossia il moto deve compiere orbite circolari¹.

6.2 Seconda legge di Keplero

Torniamo al caso generale di potenziale ordinario arbitrario $V(\rho)$ e consideriamo un settore $d\varphi = \varphi(t + dt) - \varphi(t)$ spazzato dal vettore posizione del corpo orbitante che nell'approssimazione è l'area del triangolo $A = \frac{1}{2}(\rho d\varphi)\rho$.

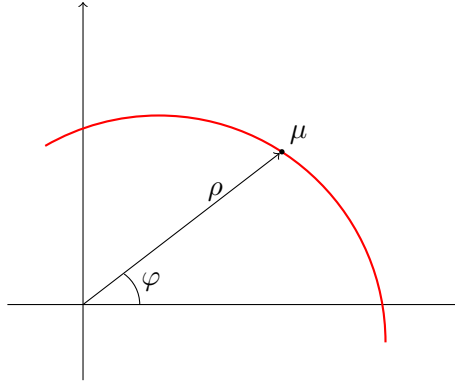


Figura 6.3

L'area spazzata dopo un generico tempo t risulta essere

$$A|_{\text{al tempo } t} = S(t) = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi' = \frac{1}{2} \int_0^t \rho^2 \frac{d\varphi}{dt'} dt' = \frac{1}{2} \int_0^t \rho^2 \dot{\varphi} dt' = \frac{l}{2\mu} t$$

ricordando la definizione di l . Osserviamo subito che la cosiddetta velocità areale $\frac{dS(t)}{dt}$ è una costante e vale $\frac{l}{2\mu}$, dove $l = l_0$ è determinato dalle condizioni iniziali. Come abbiamo già avuto modo di osservare, la relazione della velocità areale è una legge di conservazione ed è detta Seconda Legge di Keplero in onore dell'astronomo che per primo ne stabilì la validità dalle sue osservazioni. Si noti che questa legge vale per potenziale $V(\rho)$ generico.

6.3 Equazione delle orbite

Risolvere le equazioni del moto di un corpo significa trovarne una parametrizzazione che nel nostro caso sarà del tipo $\rho = \rho(t)$ e $\varphi = \varphi(t)$; per farlo sfruttiamo l'equazione di Lagrange della (6.1) per la coordinata ρ .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 = \mu \ddot{\rho} - \mu \rho \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \Rightarrow \mu \ddot{\rho} - \mu \rho \dot{\varphi}^2 = -\frac{dV}{d\rho}$$

¹Secondo il principio di minima energia questa è proprio la condizione a cui tendono tutti i corpi orbitanti e non è infatti un caso che le orbite dei pianeti del nostro Sistema Solare siano in ottima approssimazione quasi circolari.

ove si è usato il simbolo di derivata totale perchè il potenziale dipende solo da ρ nell'ipotesi di potenziale kepleriano. Sfruttando la definizione di l e riordinando otteniamo

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho} \left(\frac{l^2}{2\mu\rho^2} - \frac{k}{\rho} \right) = -\frac{d\tilde{V}}{d\rho}. \quad (6.2)$$

Osserviamo che se $l = 0 = \mu\rho^2\dot{\varphi}$, allora $\varphi = cost = \varphi_0$ e quindi il moto si svolgerebbe lungo una semiretta individuata proprio dall'angolo φ_0 ; poniamo quindi $l \neq 0$ in modo tale da avere $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{\mu\rho^2}$.

Ricordiamo ora che la coordinata polare φ è una funzione monotona e crescente nella variabile tempo t , perciò detta $t = t(\varphi)$ sarà valida la relazione $\frac{d}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi}$. Il primo membro dell'equazione (6.2) diventa allora

$$\mu \frac{d^2\rho}{dt^2} = \mu \frac{d}{dt} \left(\dot{\varphi} \frac{d\rho}{d\varphi} \right) = \mu \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\dot{\varphi} \frac{d\rho}{d\varphi} \right)$$

e definendo la funzione $u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho}$ a cui corrisponde il differenziale $d\rho = -\frac{du}{u^2}$ possiamo sostituirla nell'equazione e ottenere

$$\mu \frac{l}{\mu} u^2 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{lu^2}{\mu} \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \right) \right) = -\frac{l^2}{\mu} u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \mu\ddot{\rho}.$$

Il secondo membro di (6.2), ossia $-\frac{d}{d\rho} V(\rho)$ può essere riscritto in termini di u e diventa

$$-\frac{d}{d\rho} V(\rho) = u^2 \frac{d}{du} V(\tilde{u}) = u^2 \frac{d}{du} \left(\frac{l^2}{2\mu} u^2 - ku \right) = \frac{l^2}{\mu} u^3 - ku^2$$

e ricomponendo i due membri otteniamo l'uguaglianza

$$-\frac{l^2}{\mu} u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{l^2}{\mu} u^3 - ku^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k\mu}{l^2}, \quad (6.3)$$

in cui riconosciamo un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare, non omogenea e a coefficienti costanti per la funzione $u(\varphi)$, facilmente risolvibile coi metodi dell'analisi. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0 \quad \Rightarrow \quad u^{(o)}(\varphi) = \frac{e}{p} \cos(\varphi - \varphi_0),$$

ove l'*eccentricità* $e \geq 0$ dipende dalle condizioni iniziali e $p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l^2}{k\mu}$, mentre la soluzione particolare invece risulta essere più semplicemente $\tilde{u} = \frac{k\mu}{l^2} = \frac{1}{p}$:

la soluzione generale dell'equazione (6.3) è quindi

$$\tilde{u} + u^{(o)} \stackrel{\text{def}}{=} u(\varphi) = \frac{1}{p} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) . \quad (6.4)$$

Osserviamo quindi che la funzione $u = u(\varphi; \varphi_0, e)$ dipende dalla variabile φ , dalla condizione iniziale φ_0 e dal parametro e , oltre che dalle costanti in p . La stessa cosa vale ovviamente anche per

$$\rho = \rho(\varphi; \varphi_0, e) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

in cui riconosciamo la formula generale delle curve coniche espresse in coordinate polari. Come è facile intuire vi sono alcuni casi particolari corrispondenti ai valori che assume l'eccentricità:

- $e = 0$ fa coincidere il moto con una circonferenza di raggio $\rho = p = \frac{l^2}{k\mu}$.
- $0 < e < 1$ ha come moto corrispondente delle ellissi.
- $e = 1$ rende il moto una parabola.
- $e > 1$ fa compiere al corpo una traiettoria iperbolica.

Risulta chiaro che sussisterà una relazione non banale tra l'eccentricità dell'orbita e l'energia di un corpo che ci accingiamo a trovare.

6.4 Relazione tra energia ed eccentricità

Come abbiamo già osservato nei paragrafi precedenti l'energia totale del sistema dei due corpi è $E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \tilde{V}(\rho)$. Sostituendo in tale relazione la velocità radiale espressa in termini di $u(\varphi)$

$$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{l}{\mu} u^2 \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \right) = -\frac{l}{\mu} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)$$

otteniamo

$$E = \frac{1}{2}\mu \frac{l^2}{\mu^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \tilde{V}(\rho) = \frac{l^2}{2\mu} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \tilde{V}(\rho) = E_0, \quad \text{per } \varphi = \varphi_0 . \quad (6.5)$$

Dall'equazione (6.4) possiamo calcolare che

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{p} \frac{d}{d\varphi} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) = -\frac{1}{p} e \sin(\varphi - \varphi_0)$$

che se calcolato in $\varphi = \varphi_0$ risulta essere banalmente 0. Allora osserviamo che nel caso di potenziali kepleriani

$$E_0 = \tilde{V}(u) = \frac{l^2}{2\mu} u^2 - ku =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{l^2}{2\mu} \left[\frac{1}{p} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) \right]^2 \Big|_{\varphi=\varphi_0} - k \left[\frac{1}{p} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) \right] \Big|_{\varphi=\varphi_0} \\
&= \frac{l^2}{2\mu p^2} (1 + e)^2 - \frac{k}{p} (1 + e) .
\end{aligned}$$

La soluzione di questa equazione di secondo grado nell'incognita e ha come soluzioni due valori discordi, dei quali consideriamo solo quello positivo che ha senso fisico:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_0 l^2}{k^2 \mu}} \quad (6.6)$$

che è proprio la relazione tra eccentricità ed energia che stavamo cercando e dalla quale osserviamo la particolare proporzionalità del tipo $e \propto \sqrt{E_0}$. Da (6.6) ritroviamo alcune osservazioni già fatte in precedenza: ad esempio se $E_0 = 0$ allora $e = 1$ e le traiettorie descritte sono delle parabole; se $E_0 > 0$ allora $e > 1$ e si hanno delle iperboli.

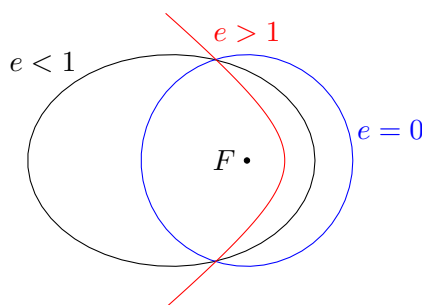


Figura 6.4: Diverse eccentricità orbitali con fuoco F .

6.5 Considerazioni finali

Grazie a questa trattazione analitica del moto di un sistema di due corpi possiamo ricavare anche la terza legge di Keplero², valida solo per orbite ellittiche. Sappiamo che l'area totale dell'orbita è $A = \pi ab$ dove a e b sono rispettivamente il semiasse maggiore e quello minore dell'ellisse. D'altra parte sappiamo che l'area dell'orbita corrisponde anche a

$$A = \int_0^T \frac{|l|}{2\mu} dt = \frac{|l|}{2\mu} T$$

dove T è il periodo di rivoluzione, e confrontando i due risultati otteniamo che

$$\frac{lT}{2\mu} = \pi ab \quad \Rightarrow \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\mu\pi}, \quad \text{dove} \quad k = \frac{la^2}{2bT}.$$

²Il cubo del semiasse maggiore di un'orbita ellittica è proporzionale al quadrato del periodo di rivoluzione

Vediamo invece adesso una precisazione di quanto detto all'inizio del paragrafo 6.3. Ricordando che

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \tilde{V}(\rho) \\ \mu\rho^2\dot{\varphi} = l \end{cases} \quad (6.7)$$

osserviamo che questo è un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine non lineari e accoppiate. Per la prima equazione vediamo che

$$\dot{\rho}^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\mu} (E - \tilde{V}(\rho)) \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - \tilde{V}(\rho))}}$$

ed integrando otteniamo

$$\int_0^t dt = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - \tilde{V}(\rho))}} = t(\rho) .$$

Invertendo la funzione abbiamo in modo analogo che $\rho = \rho(t; \rho_0)$. Dalla seconda equazione di (6.7) si può ricavare una relazione del tipo $t = t(\varphi; \varphi_0)$ che invertita restituisce $\varphi = \varphi(t; \varphi_0)$ e quindi le soluzioni delle equazioni orarie sono, in modo più generale di quanto detto precedentemente, una famiglia a due dipendenti da due condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \rho = \rho(t, E, l; \rho_0) \\ \varphi = \varphi(t, E, l; \varphi_0) . \end{cases} \quad (6.8)$$

Si rimanda al libro di testo per la risoluzione esplicita degli integrali.

Capitolo 7

Corpo Rigido

In questo capitolo ci occuperemo di un'importante applicazione del formalismo lagrangiano, e della meccanica classica in generale: il corpo rigido. Questo studio ha come scopo, non tanto quello di trattare nella sua interezza l'argomento, ma di dare una panoramica generale che permetterà agli studenti volenterosi di approfondire senza difficoltà la materia. La trattazione più formale del corpo rigido ci fornirà, come vedremo, degli strumenti che possono essere utilizzati nella trattazione della cinematica relativa.

7.1 Cinematica del corpo rigido

Come abbiamo già più volte osservato il corpo rigido è caratterizzato dalla presenza del vincolo di rigidità, che, essendo olonomo e a lavoro virtuale totale nullo, ci permette di utilizzare la formulazione lagrangiana. Inanzitutto per iniziare la nostra trattazione abbiamo bisogno di fissare una terna *inerziale* (Σ, Ω) *destrorsa*. Possiamo dividere i corpi rigidi essenzialmente in due categorie:

1. **Sistema fisico rigido *discreto*.**

Caratterizzato da N punti tali che le mutue distanze siano costanti ($\overline{P_i P_j} = \text{cost.} = c_{ij}$).

2. **Sistema fisico rigido *continuo*.**

Caratterizzato da una massa totale M e una densità $\Delta(X, Y, Z)$ tale che $M = \int_V dX dY dZ \Delta(X, Y, Z)$. Se Δ è costante il corpo si dice omogeneo. Inoltre vale come prima $\forall (P_i, P_j) \in \text{corpo}$ abbiamo $\overline{P_i P_j} = \text{cost.} = c_{ij}$.

Possiamo osservare che ci basta conoscere la configurazione di 3 punti (non allineati) appartenenti al corpo per determinare la posizione del corpo stesso. Vediamo ora come costruire una terna *solidale* al corpo:

- prendiamo tre punti Q_1, Q_2 e Q_3 e fissiamo Q_1 come origine O ($Q_1 \equiv O$);

- come asse x' prendiamo una retta parallela a $\overline{Q_1Q_2}$;
- nel piano del triangolo $\widehat{Q_1Q_2Q_3}$ scegliamo l'asse y' in modo che sia perpendicolare a x' ;
- prendiamo infine l'asse z' ortogonale a x' e y' e orientato per avere una terna destrorsa.

Abbiamo così definito la terna *solidale* $S(O, x'y'z')$.

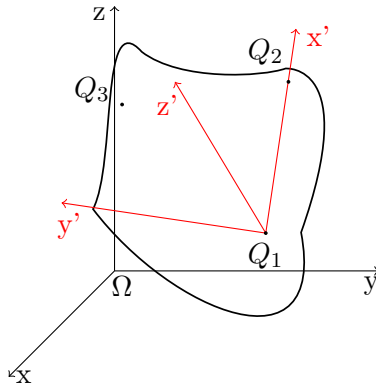


Figura 7.1: Terna solidale.

Guardiamo ora i gradi di libertà del sistema: per ogni punto abbiamo 3 coordinate spaziali, siccome abbiamo detto che il numero minimo di punti necessari per descrivere la posizione di un corpo rigido è 3; quindi abbiamo in totale 9 coordinate a cui dobbiamo sottrarre il numero di relazioni che legano i tre punti, ovvero 3; abbiamo perciò 6 gradi di libertà. Lo spazio delle configurazioni su cui lavoreremo è, come giustificheremo a breve, $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{SO}(3)$. I gradi di libertà rappresentano i moti della terna solidale S rispetto alla terna solidale Σ . A livello euristico lo spazio delle configurazioni di un corpo rigido non è altro che il gruppo dei "moti" euclidei (trasformazioni tra terne cartesiane ortogonali). Le trasformazioni sono dette rototraslazioni. Ciascun insieme forma un *gruppo*. Il gruppo delle traslazioni è \mathbb{R}^3 poiché dire che servono 3 coordinate per definire una traslazione è equivalente a dire che sono necessarie 3 coordinate cartesiane dell'origine di S . Definiamo il vettore traslazione $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z) \in \mathbb{R}^3$, dato che \mathbb{R}^3 è uno spazio vettoriale allora possiamo affermare che il gruppo delle traslazioni è un gruppo *abeliano* (ovvero commutativo).

Il gruppo delle rotazioni proprie nello spazio fisico \mathbb{E}^3 è dato dalle matrici 3×3 reali che appartengono al *gruppo ortogonale speciale* $\mathcal{SO}(3)$, ovvero

$$\mathcal{SO}(3) = \{A_{3 \times 3} \text{ reali t.c. } A\tilde{A} = \tilde{A}A = \mathbb{I} \text{ e con } \det A = 1\}$$

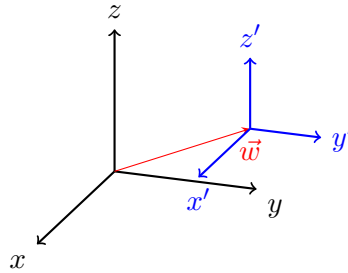


Figura 7.2: Gruppo delle traslazioni.

dove \tilde{A} è la matrice trasposta e \mathbb{I} è la matrice identità

$$\mathbb{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Osservazione 7.1. *Se $A, B \in \mathcal{SO}(3)$ in generale $AB \neq BA$, ma è importante sottolineare che la composizione delle due matrici è ancora una rotazione.*

Enunciamo ora un teorema molto intuitivo, ma fondamentale nello studio del corpo rigido.

Teorema 7.1 (di Eulero). *Il moto più generale di un corpo rigido con un punto fisso è una rotazione. (Si rimanda al libro di testo per la dimostrazione)*

Troviamo ora l'espressione di una matrice di rotazione rispetto ad uno degli assi cartesiani (per esempio l'asse z), la quale ci permetterà di comprendere meglio la struttura delle matrici di $\mathcal{SO}(3)$. Prendiamo in considerazione un punto P di coordinate cartesiane (x, y, z) ; nel piano xy è possibile individuare con le coordinate polari il punto mediante (ρ, ϑ) e sarà legato alle precedenti coordinate dal sistema

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Immaginiamo ora di ruotare il punto di un angolo φ e troviamo le coordinate cartesiane del punto trasformato $P'(x', y', z')$. Ricordando che le rotazioni sono isometrie, possiamo osservare che il punto trasformato avrà la stessa distanza dall'origine ($\rho' = \rho$). Da considerazioni geometriche si evince che

$$\begin{cases} x' = \rho \cos(\vartheta + \varphi) \\ y' = \rho \sin(\vartheta + \varphi) \\ z' = z \end{cases}$$

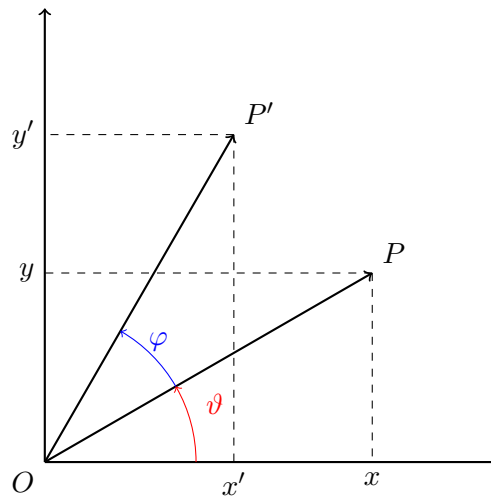


Figura 7.3: Rotazione del piano xy attorno all'asse z .

e svolgendo i calcoli otteniamo in forma matriciale $\vec{r}' = A_z \vec{r}$, ovvero

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Possiamo osservare che $A_z(\varphi) \in \mathcal{SO}(3)$ poiché $AA^T = \mathbb{I}$ e inoltre $\det(A) = +1$. Il lettore volenteroso potrà verificare che anche $A_x(\varphi), A_y(\varphi) \in \mathcal{SO}(3)$. Un'altra caratteristica che si deduce da queste matrici, ma che è valida per tutte quelle di rotazione è che $\text{tr}(A) = 1 + 2 \cos \varphi$. Dal discorso precedente emerge il fatto che ogni rotazione appartiene ad $\mathcal{SO}(3)$.

A_x, A_y, A_z sono esempi di rotazione $\in \mathcal{SO}(3)$ di un angolo generico intorno ad un asse (asse di rotazione) \vec{n} . Tenendo presente la condizione di versore dell'asse di rotazione $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ ci accorgiamo che per descrivere una rotazione sono necessari, in accordo con i gradi di libertà di un corpo rigido, 3 parametri: il primo è dato dall'angolo $\varphi \in [0, 2\pi)$ e gli altri 2 sono dati dalle componenti indipendenti di \vec{n} .

Osservazione 7.2. *Riguardo alle matrici di rotazione trovate precedentemente possiamo inoltre osservare che l'operazione che stiamo facendo sul punto preso in considerazione non è altro che una sua rotazione in senso antiorario rispetto ad un determinato asse. Se vogliamo invece, come ci servirà più avanti, trovare le trasformazioni che permettano di ruotare gli assi (sempre in senso antiorario) rispetto ad un versore prefissato dobbiamo vedere il problema da un altro punto di vista: ruotare gli assi in senso antiorario è equivalente a ruotare il sistema in senso orario. Da quest'ultima*

considerazione si evince che basta utilizzare l'angolo $-\varphi$ al posto dell'angolo φ nella matrice A_n .

Prima di vedere un'altra tipologia di parametrizzazione delle rotazioni di un corpo rigido sotto ipotesi di esistenza di un punto fisso enunciato un teorema che generalizza il 7.1 precedentemente enunciato.

Teorema 7.2 (di Chasles). *L'atto di moto più generale di un corpo rigido è una rototraslazione.*

7.1.1 Rotazioni infinitesime

Le rotazioni infinitesime sono rotazioni che si discostano dalla trasformazione identica ($\mathbb{I}_{3 \times 3} \in \mathcal{SO}(3)$) per quantità infinitesime (utilizzeremo la notazione d).

Definizione 7.1 (rotazione infinitesima). *La matrice $A \in \mathcal{SO}(3)$ definita da*

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} + E ;$$

con E tale che $|E_{ij}| \ll 1 \forall i, j = 1, 2, 3$ viene detta rotazione infinitesima.

Vediamo ora un rapido esempio di rotazione infinitesima. Consideriamo la matrice $A_z(\varphi)$ e calcoliamo lo sviluppo in serie di Taylor di ogni termine della matrice fermandoci al primo ordine

$$A_z(\varphi) \underset{\varphi=0}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -d\varphi & 0 \\ d\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -d\varphi & 0 \\ d\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E .$$

La matrice così trovata è una rotazione infinitesima. Da questo esempio si evince già un'importante proprietà delle matrici E : l'antisimmetria.

Analizziamo ora le altre proprietà delle matrici di rotazione infinitesima. L'insieme

$$\{A \in \mathcal{SO}(3) : A = \mathbb{I} + E\}$$

è un gruppo abeliano rispetto alla somma (come ci si aspetta dall'algebra lineare), ma anche rispetto alla *composizione* (come dimostreremo a breve). In realtà si può dimostrare che questa struttura è uno spazio vettoriale di dimensione 3, ma l'analisi dettagliata di questa proprietà esula dagli scopi del corso. Date due matrici $A, B \in \mathcal{SO}(3)$ la legge di composizione per le matrici E è definita da

$$AB = (\mathbb{I} + E)(\mathbb{I} + E') = \mathbb{I} + E + E' + EE' \sim \mathbb{I} + E + E' ;$$

dove nell'ultimo passaggio si è trascurato il prodotto misto poiché formato da infinitesimi di ordine superiore. Dall'ultimo termine ricavato si evince che

la legge di composizione è un'operazione interna e commutativa. L'elemento neutro non è altro che la matrice nulla e la matrice inversa di $A = \mathbb{I} + E$ si vede che è $A^{-1} = \mathbb{I} - E$, infatti

$$AA^{-1} = (\mathbb{I} + E)(\mathbb{I} - E) = \mathbb{I} + E - E - E^2 = \mathbb{I} .$$

Le matrici $\in \mathcal{SO}(3)$ essendo matrici di rotazione sono ortogonali e perciò, come abbiamo osservato precedentemente, abbiamo

$$\tilde{A} = A^{-1} = (\mathbb{I} + \tilde{E}) \Rightarrow \tilde{E} = -E \Leftrightarrow E_{ij} = -E_{ji} \quad \forall i, j .$$

La forma generale di E nella base xyz (terna cartesiana ortogonale) è data da

$$E = \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_z & -d\Omega_y \\ -d\Omega_z & 0 & d\Omega_x \\ d\Omega_y & -d\Omega_x & 0 \end{bmatrix} ;$$

dove sottolineiamo che i $d\Omega_i$ non sono differenziali, ma quantità infinitesime. Ruotiamo ora un vettore \vec{r} tramite una rotazione dettata dalla matrice $A = \mathbb{I} + E$. Il vettore trasformato \vec{r}' sarà dato da

$$\vec{r}' \stackrel{\text{def}}{=} A\vec{r} = (\mathbb{I} + E)\vec{r} = \vec{r} + E\vec{r} .$$

Calcoliamo ora la variazione infinitesima del vettore \vec{r}

$$d\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}' - \vec{r} = E\vec{r} = (y d\Omega_z - z d\Omega_y)\vec{i} + (-x d\Omega_z + z d\Omega_x)\vec{j} + (x d\Omega_y - y d\Omega_x)\vec{k} ;$$

ponendo $d\vec{\Omega} = d\Omega_x\vec{i} + d\Omega_y\vec{j} + d\Omega_z\vec{k}$ allora abbiamo che

$$d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{\Omega} . \tag{7.1}$$

Il vettore $d\vec{\Omega}$ viene chiamato vettore di spostamento rotatorio e individua l'asse di rotazione come direzione e verso dato che i punti che non subiscono rotazione sono proprio quelli che appartengono all'asse di rotazione ($d\vec{r} = 0$). Sottolineiamo infine che, trattandosi di una rotazione, $|d\vec{\Omega}|$ deve essere un angolo e perciò dividendo formalmente per dt l'equazione (7.1) otteniamo

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{\omega} ; \tag{7.2}$$

dove $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare. Con i concetti appena sviluppati vediamo un'importante applicazione che ci permette di scrivere l'equazione fondamentale della cinematica rigida.

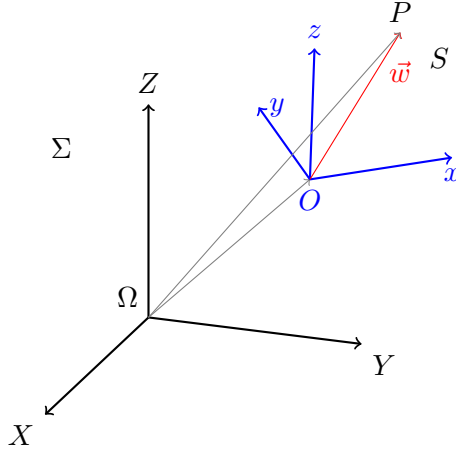


Figura 7.4: Vettore generico \vec{w} nella terna solidale S e rispetto alla terna fissa Σ .

Derivata temporale di un vettore

Prendiamo un vettore generico \vec{w} nella terna solidale S tale che non cambi le componenti nel sistema di riferimento scelto e lo si indichi con $\vec{w}|_S$. Osservando la figura si evince che

$$d\vec{w}|_S = d\vec{w}|_\Sigma + \underbrace{(d\vec{w})_{\text{rot}}}_{=\vec{w} \times d\vec{\Omega}} .$$

Allora abbiamo che

$$d\vec{w}|_\Sigma = d\vec{w}|_S - \vec{w} \times d\vec{\Omega} = d\vec{w}|_S + d\vec{\Omega} \times \vec{w} ,$$

dividendo formalmente per dt otteniamo

$$\left. \frac{d\vec{w}}{dt} \right|_\Sigma = \left. \frac{d\vec{w}}{dt} \right|_S + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right) \times \vec{w} .$$

Sostituendo ora \vec{w} con il vettore posizione \vec{r} e facendo le adeguate sostituzioni otteniamo

$$\vec{v}|_\Sigma = \vec{v}|_S + \vec{\omega} \times \vec{r} ;$$

assimilando $\vec{v}|_S$ a $\vec{v}(O)$ e scrivendo \vec{r} come $(P - O)$, dove O è l'origine di S ricaviamo la *formula fondamentale della cinematica rigida*:

$$\vec{v}(P)|_\Sigma = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \times (P - O) . \quad (7.3)$$

Da qua si può ben osservare che l'atto di moto più generale di un corpo rigido è una *rototraslazione*.

Per N punti materiali ($i = 1, \dots, N$) legati da vincoli di rigidità possiamo scrivere

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i .$$

Vediamo, per concludere l'argomento, alcuni casi particolari:

1. *moti piani*: $\vec{v}_i \cdot \vec{\omega} = 0 \forall i$, ovvero $\vec{\omega}$ sempre ortogonale al piano di moto;
2. *moto con punto fisso*: $\vec{v}(O) = 0$ e si può scegliere la terna solidale con origine nel punto fisso;
3. *moto con asse fisso*: la direzione di $\vec{\omega}$ non varia nel tempo, ma può variare in modulo.

Diamo ora una piccola osservazione il cui significato sarà meglio compreso nel paragrafo successivo, ma, per una migliore chiarezza, ci è sembrato più opportuno inserirla alla fine di questo paragrafo.

Osservazione 7.3. *La velocità angolare presente nelle formule utilizzate è la velocità di rotazione istantanea e l'asse considerato è sempre quello di rotazione istantanea.*

7.1.2 Asse di istantanea rotazione

Per riuscire a capire l'asse di istantanea rotazione e le sue proprietà diamo due proposizioni che ne chiariscono il significato.

Proposizione 7.1 (caratterizzazione asse di rotazione istantanea).
Se $\vec{\omega} \neq 0$ ad un dato istante t , allora esiste a quell'istante t una retta parallela a $\vec{\omega}$, i cui punti hanno velocità parallela a $\vec{\omega}$ oppure nulla.

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che prendendo il prodotto scalare della (7.3) con $\vec{\omega}$ troviamo che

$$\vec{v}(P) \cdot \vec{\omega} = \vec{v}(O) \cdot \vec{\omega} ;$$

ovvero che il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{\omega}$ è invariante nel campo delle velocità di un sistema rigido. Ogni punto P ha proiezione $\vec{v}(P)$ uguale a quella di O e di qualsiasi altro punto appartenente al corpo.

Quello che vogliamo dimostrare è che esiste una linea, parallela a $\vec{\omega}$, lungo la quale la velocità si riduce alla sola componente parallela a $\vec{\omega}$. Per questo scopo consideriamo il piano π ortogonale a $\vec{\omega}$ e passante per O e cerchiamo un punto $P^* \in \pi$ tale che $\vec{v}(P^*) \times \vec{\omega} = 0$. Valutando l'equazione (7.3) nel punto $P \in \pi$, prendendo il prodotto vettoriale di entrambi i membri per $\vec{\omega}$ e sapendo che $\vec{\omega} \cdot (P - O) = 0$ ($(P - O) \in \pi$) abbiamo che

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = (P - O)\omega^2 + \vec{v}(O) \times \vec{\omega} .$$

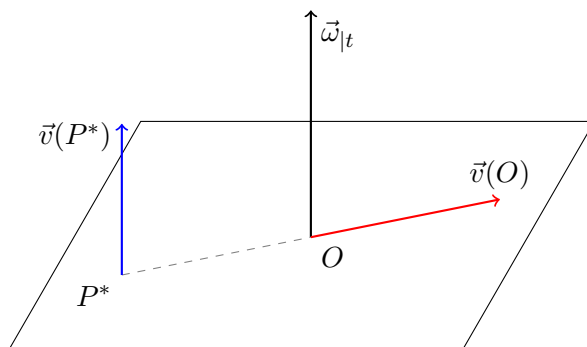


Figura 7.5: Asse d'istantanea rotazione.

Imponendo la condizione di P^* vediamo che l'ipotesi è soddisfatta per

$$P^* - O = \vec{\omega} \times \frac{\vec{v}(O)}{\omega^2} .$$

In aggiunta deduciamo immediatamente che tutti i punti che appartengono alla stessa retta parallela a $\vec{\omega}$ hanno la stessa velocità. \square

Proposizione 7.2. *La direzione di $\vec{\omega}$ è costante in $S \Leftrightarrow$ è costante in Σ .*

Dimostrazione. Definiamo $\vec{\omega}$ come

$$\vec{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \omega \vec{n} .$$

Come ipotesi noi sappiamo che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega \vec{n}}{|\vec{\omega}|} \right) \Big|_S = 0 ,$$

ma sapendo che

$$\frac{d\vec{n}}{dt} \Big|_{\Sigma} = \frac{d\vec{n}}{dt} \Big|_S + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{n}}_{=0} .$$

La tesi risulta perciò dimostrata. \square

Prima di passare alla dinamica vediamo ancora un paio di casi particolari di moti del corpo rigido:

1. *moti rigidi piani:* sono caratterizzati da un piano solidale che non varia al variare di t , la retta $P - O \in$ piano e perciò abbiamo che $\vec{v} \cdot \omega = 0 \vec{V}$ punto. Da ciò si intuisce che qualsiasi moto piano è una rotazione.

Osservazione 7.4. *Il centro di rotazione istantanea, ovvero l'intersezione tra $\vec{\omega}$ e il piano invariante, in generale varia nel tempo.*

2. *Moto con punto fisso*: dalle prime considerazioni fatte nella prima proposizione deduciamo che

$$\vec{v}(P) \cdot \vec{\omega} = \vec{v}(O) \cdot \vec{\omega} = 0 \quad \forall P .$$

3. *Moto con asse fisso*.

7.2 Dinamica del corpo rigido

Visto che adesso abbiamo studiato una rapida panoramica della cinematica del corpo rigido, passiamo alla dinamica. Gli argomenti trattati sono simili a quelli visti nella meccanica newtoniana, ma il formalismo matematico utilizzato è nettamente più astratto e focalizzato sull'esistenza di costanti del moto.

7.2.1 Momento angolare ed energia cinetica

Calcoliamo le espressioni del momento angolare per un corpo rigido formato da N punti materiali legati da vincoli di rigidità con un punto fisso che per semplicità assumiamo essere l'origine del sistema solidale.

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[r_i^2 (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}) \right] \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ricaviamo infine le tre componenti del momento angolare

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_x \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \\ L_y &= -\omega_x \sum_i m_i x_i y_i + \omega_y \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \sum_i m_i x_i z_i - \omega_y \sum_i m_i y_i z_i + \omega_z \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) . \end{aligned}$$

Dalle espressioni precedenti è ormai chiaro che possiamo esprimere il momento angolare come

$$\vec{L} = I \vec{\omega} . \quad (7.5)$$

Dove I è la matrice d'inerzia definita come segue

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{yz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} .$$

Gli elementi diagonali vengono chiamati *momenti d'inerzia*, per esempio

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) ;$$

$(r_i^2 - x_i^2)$ non è altro che la distanza del punto i rispetto (in questo caso) all'asse x .

Fuori diagonale per esempio abbiamo

$$I_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i$$

che vengono detti *prodotti d'inerzia*.

Ritorniamo ora ad analizzare la (7.5); come possiamo osservare i vettori \vec{L} e $\vec{\omega}$ sono grandezze fisiche differenti e hanno dimensioni fisiche diverse; perciò è chiaro che la matrice I non può rappresentare un semplice cambiamento di coordinate. Infatti I ha dimensioni fisiche proprie e va interpretato come un operatore che ha in ingresso un vettore $\vec{\omega}$ e dà come risultato un vettore \vec{L} di diversa natura fisica. Questo nuovo operatore viene chiamato tensore e la *matrice* I presente nella (7.5) non è altro che l'insieme delle componenti, nella terna scelta, del tensore d'inerzia. La potenza della notazione tensoriale sta nel fatto che le relazioni tensoriali sono indipendenti dal sistema di riferimento; infatti, cambiando la terna solidale al corpo, certamente gli elementi della matrice cambieranno, ma le relazioni che coinvolgono i tensori rimangono *invariate*. Osserviamo infine che il tensore d'inerzia è un tensore di rango 2.

Come abbiamo già potuto osservare nei calcoli precedentemente svolti, la matrice $I_{(x,y,z)}$ è una matrice *simmetrica* e perciò è diagonalizzabile. Gli assi che diagonalizzano la matrice d'inerzia vengono detti *assi principali d'inerzia* e la terna diagonale della matrice viene detta *terna principale d'inerzia*.

Passiamo ora all'energia cinetica

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I\vec{\omega}) . \end{aligned} \tag{7.6}$$

Nella terna principale otteniamo

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) .$$

Esprimiamo ora la velocità angolare come $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, dove \vec{n} è un versore interpretato come l'asse di rotazione istantanea, e vediamo come diventa l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} (\omega \vec{n}) \cdot I (\omega \vec{n}) = \frac{1}{2} \omega^2 (\vec{n} \cdot I \vec{n}) ;$$

il termine $(\vec{n} \cdot I\vec{n})$ è uno scalare che si chiama *momento d'inerzia* del corpo rispetto all'asse di rotazione istantanea

$$\mathcal{I} = \vec{n} \cdot I\vec{n} .$$

Per concludere questo paragrafo diciamo che tutti i teoremi affrontati nella dinamica newtoniana sono ancora validi (es. Teoremi di König e Teoremi di Huygens-Steiner).

7.2.2 Angoli di Eulero

Vediamo ora un altro modo per parametrizzare le rotazioni: gli *angoli di Eulero*. Prendiamo una terna inerziale con la stessa origine della terna solida (inerziale). L'idea è quella di introdurre 3 angoli usando come singoli assi quelli delle terne definite dalle trasformazioni:

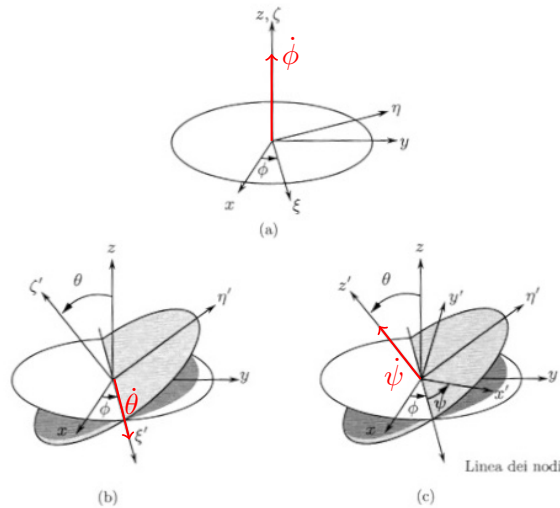


Figura 7.6: Angoli di Eulero.

1. Rotazione antioraria di angolo φ intorno a z :

$$(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta) .$$

2. Rotazione antioraria di angolo ϑ intorno a ξ :

$$(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (\xi', \eta', \zeta') .$$

3. Rotazione antioraria di angolo ψ intorno a ζ' :

$$(\xi', \eta', \zeta') \rightarrow (x', y', z') .$$

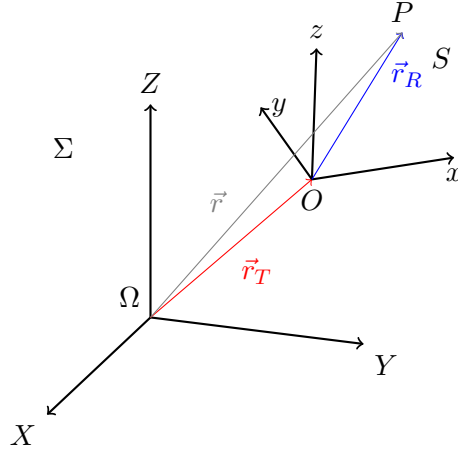


Figura 7.7: Vettori posizione nei diversi sistemi di riferimento.

Per convenzione si usa scrivere

$$A(\varphi, \vartheta, \psi) = B_{z'}(\psi)C_{\xi}(\vartheta)D_z(\varphi)$$

dove ciascuna delle matrici B , C e D è ortogonale e quindi anche A è ortogonale. Essendo una composizione di matrici, l'ordine di applicazione conta.

7.3 Cinematica e dinamica relative

Ora che abbiamo acquisito gli strumenti necessari possiamo trattare la cinematica relativa. Consideriamo un punto P liberamente mobile rispetto a 2 osservatori:

- osservatore *inerziale* (Σ, Ω) : terna fissa,
- osservatore *non inerziale* (S, O) : terna che si muove di moto qualsiasi rispetto a Σ .

Le quantità prese rispetto al sistema di riferimento (Σ, Ω) vengono dette quantità cinematiche *assolute*, invece quelle prese rispetto al sistema di riferimento (S, O) vengono dette quantità cinematiche *relative*, infine il moto rigido di S rispetto a Σ è tradotto da quantità cinematiche dette di *trascinamento*. Per semplicità adottiamo questa notazione:

- le quantità assolute le indichiamo senza indici (es. \vec{r});
- le quantità relative le indichiamo con il pedice R (es. \vec{r}_R);
- le quantità di trascinamento le indichiamo con il pedice T (es. \vec{r}_T).

La derivata temporale di un vettore la possiamo perciò scrivere come

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \left(\frac{d\vec{w}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \times \vec{w}_R . \quad (7.7)$$

Dal disegno si può vedere banalmente che

$$\vec{r} = \vec{r}_R + \vec{r}_T ; \quad (7.8)$$

derivando temporalmente l'equazione in entrambi i membri otteniamo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_R}{dt} + \frac{d\vec{r}_T}{dt} = \vec{v}_R + \vec{v}_T + \vec{\omega} \times \vec{r}_R ,$$

e derivando ancora una volta l'equazione diventa

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}_R + \vec{\omega} \times \vec{v}_R + \vec{a}'_T + \vec{\alpha} \times \vec{r}_R + \vec{\omega} \times (\vec{v}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R) = \\ &= \vec{a}_R + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R + \underbrace{\vec{a}'_T + \vec{\alpha} \times \vec{r}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)}_{=\vec{a}_T} = \\ &= \vec{a}_R + \vec{a}_T + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R ; \end{aligned}$$

dove $2\vec{\omega} \times \vec{v}_R$ viene chiamata *accelerazione di Coriolis*. Adesso, dal momento che abbiamo analizzato la formula delle accelerazioni relative, possiamo introdurre la *legge fondamentale della dinamica modificata*. Sia \vec{F} la risultante delle forze attive agenti su un punto materiale P , nel sistema di riferimento relativo S abbiamo

$$m\vec{a}_R = \underbrace{\vec{F} - m\vec{a}_T}_{\vec{F}_T} - \underbrace{m\vec{a}_c}_{\vec{F}_c} ; \quad (7.9)$$

dove al secondo membro possiamo osservare la correzione della forza \vec{F} con le forze apparenti.

Forze apparenti in ambito lagrangiano

Ricordiamo che

1. Le equazioni di Lagrange sono invarianti in forma;
2. Se si opera una trasformazione di coordinate dipendenti da t esplicitamente, c'è la possibilità che si passi in un sistema di riferimento *non inerziale*;
3. Scritta \mathcal{L} nel sistema inerziale, si riconosce un vincolo *reonomo*;
4. Scritta \mathcal{L} nel sistema di riferimento *non inerziale* del vincolo (il vincolo in questo caso diventa scleronomo), si devono trattare le forze apparenti: per fare ciò deve necessariamente esistere un'energia potenziale associata a tali forze.

Vediamo ora un esempio che giudichiamo chiarificatore riguardo alla scelta del sistema di riferimento per la scrittura della lagrangiana in un sistema fisico.

Sia P un punto materiale di massa m vincolato ad una semiretta liscia passante per un punto Q e giacente in un piano orizzontale. Ipotizzato che il punto Q si muova lungo x con $\vec{a}_Q = a\vec{i}$ e che la semiretta ruoti intorno a Q con $\vec{\omega} = \text{cost.}$, scrivere \mathcal{L} e discutere l'esistenza di costanti del moto.

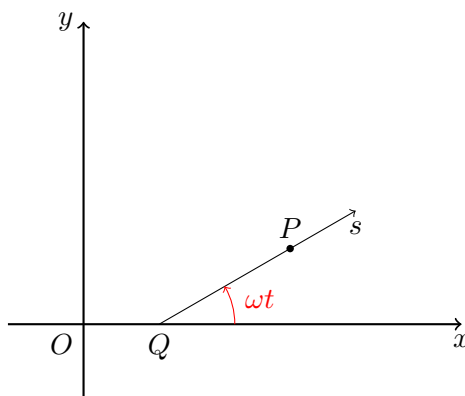


Figura 7.8: Esempio di cambiamento di sistema di riferimento.

- **Osservatore inerziale** (Oxy). In questo sistema di riferimento abbiamo un vincolo olonomo, bilatero salvo che in Q , *reonomo*, liscio per ipotesi e lavoro virtuale totale nullo. Il sistema possiede un solo grado di libertà e scegliamo di prendere come coordinata generalizzata $s \in (Q, +\infty)$ la distanza di P da Q . In questo sistema la lagrangiana coincide con l'energia cinetica $\mathcal{L} = T$ e il lettore volenteroso dimostrerà senza problemi che

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(s, \dot{s}, t) ;$$

ovvero che la lagrangiana \mathcal{L} dipende esplicitamente dal tempo t

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \neq 0 .$$

Siccome

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = - \frac{d\mathcal{H}}{dt} ,$$

l'hamiltoniana *non* si conserva.

- **Osservatore non inerziale.** Per semplicità consideriamo Q fermo, l'asta che ruota con velocità angolare $\vec{\omega} = \text{cost.}$ e mettiamoci in tale sistema di riferimento. L'analisi del vincolo è identica alla precedente,

a eccezione ora che il vincolo è *scleronomo*. Utilizzando sempre la coordinata s otteniamo per l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 ,$$

invece per l'energia potenziale dobbiamo considerare i potenziali dati dalle forze apparenti

$$V = V_{\text{app}} = V_T .$$

Il potenziale V_T che sarà dato solo dalla forza centrifuga sarà uguale a

$$V_T = -\frac{m}{2}\omega^2 s^2 ;$$

perciò la lagrangiana sarà uguale a

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 s^2 .$$

Come possiamo osservare la lagrangiana ora non ha alcuna dipendenza esplicita dal tempo ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$); quindi

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$$

l'hamiltoniana si conserva e coincide con l'energia (vincolo scleronomo).

7.4 Dinamica di alcuni sistemi rigidi notevoli

In questo paragrafo consideriamo il moto libero, ovvero non vincolato, di un corpo rigido in moto con un *punto fisso*. Per tali sistemi consideriamo l'origine del sistema inerziale coincidente con l'origine del sistema solidale nel punto fisso. Siccome il moto più generale di un corpo rigido in queste condizioni è una rotazione, adottiamo come coordinate generalizzate gli angoli di Eulero.

7.4.1 Equazioni di Eulero

Per il sistema appena descritto la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I\vec{\omega} - V ;$$

dove l'energia cinetica può essere scritta come

$$T = \frac{1}{2} \left(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2 \right) .$$

Definiamo ora

$$\omega_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega_\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \omega_\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\psi}{dt}. \quad (7.10)$$

Dal momento che abbiamo T nella terna (x, y, z) , ma $\vec{\omega}$ è riferita a tre assi (Z, n, z) che non appartengono tutti alla stessa terna, allora dobbiamo calcolare, a partire da $(\varphi, \vartheta, \psi)$ e $\omega_\varphi, \omega_\vartheta, \omega_\psi$, le componenti $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Applicando le matrici di rotazione utilizzate per definire gli angoli di Eulero e utilizzando la figura 7.6 si vede che

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \omega_y = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \omega_z = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (7.11)$$

Le equazioni del moto derivate da \mathcal{L} sono complicate ma tra queste, l'equazione di Lagrange per ψ potrebbe avere una forma funzionale più semplice. Scriviamo l'equazione di Eulero-Lagrange per la coordinata ψ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi \stackrel{\text{def}}{=} N_z;$$

essendo ψ una coordinata di rotazione allora Q_ψ sarà il momento della forza attiva

$$Q_\psi = - \frac{\partial V(\varphi, \vartheta, \psi)}{\partial \psi} = \left(\vec{r} \times \vec{F}^{(a)} \right)_z.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \omega_z} \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \dot{\omega}_z$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \omega_x} \frac{\partial \omega_x}{\partial \psi} + \frac{\partial T}{\partial \omega_y} \frac{\partial \omega_y}{\partial \psi} = I_1 \omega_x \omega_y - I_2 \omega_y \omega_x;$$

perciò l'equazione di Lagrange per ψ è

$$I_3 \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_1 - I_2) = N_z.$$

Dal momento che le altre due equazioni sono troppo complesse da trovare, rinunciamo a scrivere le equazioni nella procedura sopra descritta. Osserviamo che, a meno di ridenominare gli assi x, y, z si ottengono altre 2 equazioni permutando ciclicamente (x, y, z) e $(1, 2, 3)$; perciò otteniamo

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_2 - I_3) = N_x \\ I_2 \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_3 - I_1) = N_y \\ I_3 \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_1 - I_2) = N_z \end{cases} \quad (7.12)$$

che vengono dette *equazioni di Eulero*, che sono 3 equazioni differenziali del secondo ordine nelle φ, ϑ, ψ , non lineari e accoppiate.

Osservazione 7.5. In realtà le equazioni di Eulero si usano anche per moti rototraslatori nel caso in cui $\vec{F}^{(\text{ext})} = 0$. Infatti $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, ovvero il centro di massa si muove di moto inerziale; perciò la terna solidale scelta deve avere l'origine O nel centro di massa, tipicamente considerato a riposo.

7.4.2 Cenni alla risoluzione

Per la risoluzione dobbiamo utilizzare gli integrali primi di moto, infatti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 ,$$

ovvero L_x, L_y, L_z si conservano. Inoltre $\mathcal{L} = T$ ed $E = T$ si conserva. Da qua in avanti si possono utilizzare diverse procedure, tra cui:

1. risoluzione delle equazioni associate agli integrali primi $(\varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi})$. La risoluzione con tale metodo, tuttavia, può risultare complessa (funzioni ellittiche).
2. Procedura geometrica: *ellissoide d'inerzia di Poinsot*. Il moto del corpo rigido posso vederlo come la rotazione di un ellissoide su un piano, ma precisiamo bene che tale ellissoide non ha alcun significato fisico: il moto dell'ellissoide non corrisponde al moto concreto del corpo. Tale visualizzazione, tuttavia, ha alcuni vantaggi in quanto il moto dell'ellissoide ha alcune proprietà utili allo studio della dinamica del corpo. Vediamo ora come effettuare la costruzione di Poinsot. Come abbiamo precedentemente visto, possiamo scrivere il momento d'inerzia come

$$\mathcal{I} = \vec{n} \cdot I\vec{n} ,$$

con $\vec{n} = \vec{n}(t)$ versore che individua l'asse d'istantanea rotazione tale che $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$. L'energia cinetica, che ci servirà dopo, è data da

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2 .$$

Il versore che indica l'asse d'istantanea rotazione può essere riscritto come

$$\vec{n} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} ,$$

con α, β, γ i coseni direttori del versore. Il momento d'inerzia \mathcal{I} può perciò essere riscritto come

$$\mathcal{I} = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2 [I_{xy}\alpha\beta + I_{yz}\beta\gamma + I_{xz}\alpha\gamma] .$$

Definiamo ora il vettore

$$\vec{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{n}}{\sqrt{\mathcal{I}}} ;$$

sostituendolo nell'equazione precedente e diagonalizzando la matrice d'inerzia otteniamo

$$I_1\rho_1^2 + I_2\rho_2^2 + I_3\rho_3^2 = 1 ,$$

che è l'equazione di un ellissoide nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 . Definiamo infine la funzione F definita da

$$F(\vec{\rho}) = \vec{\rho} \cdot I \vec{\rho} .$$

Le curve di livello di F sono ellissoidi e, in particolare, la curva corrispondente a $F = 1$, ovvero quella trovata precedentemente, viene chiamata *ellissoide d'inerzia*. È banale vedere che il vettore $\vec{\rho}$, che varia nel tempo, ha sempre come estremità un punto appartenente all'ellissoide d'inerzia. Dall'analisi sappiamo che lo spazio dei vettori normali alla superficie è dato da

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho_1}, \frac{\partial F}{\partial \rho_2}, \frac{\partial F}{\partial \rho_3} \right) = 2(I_1\rho_1, I_2\rho_2, I_3\rho_3) ,$$

ma dato che $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$, allora possiamo scrivere

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{\omega}}{\omega\sqrt{\mathcal{I}}} ,$$

quindi possiamo concludere che

$$\nabla F = \frac{2}{\omega\sqrt{\mathcal{I}}} (I_1\omega_x\vec{i} + I_2\omega_y\vec{j} + I_3\omega_z\vec{k}) = \frac{2}{\omega\sqrt{\mathcal{I}}}\vec{L} = \sqrt{\frac{2}{T}}\vec{L} .$$

Il vettore $\vec{\omega}$ perciò si muove in modo tale che la corrispondente normale all'ellissoide d'inerzia sia parallela al momento angolare e, siccome \vec{L} e T sono costanti del moto, ∇F non dipende dal tempo.

Inoltre, dal momento che $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, esiste un piano invariante π .

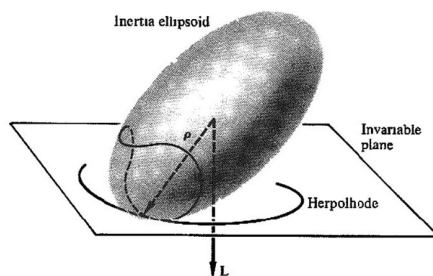


Figura 7.9: Ellissoide d'inerzia.

La distanza d tra l'origine O e tale piano π si può dimostrare essere costante.

Dimostrazione.

$$d = \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{L}}{|\vec{L}|} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{|\vec{L}| \sqrt{\mathcal{I} \omega^2}} = \frac{\sqrt{2T}}{|\vec{L}|}.$$

Dato che \vec{L} e T sono costanti del moto, allora abbiamo concluso. \square

L'intersezione di $\vec{\omega}$ con il piano invariante è un punto (centro di rotazione istantanea) e il moto è di puro rotolamento con centro di rotazione istantanea che gioca il ruolo di punto di contatto.

7.4.3 Trottole

Prendiamo in considerazione un corpo rigido, con $I_1 = I_2$ e con I_3 qualsiasi, libero e soggetto solamente alla forza gravitazionale, ovvero una *trottola di Lagrange*. L'energia potenziale sarà data

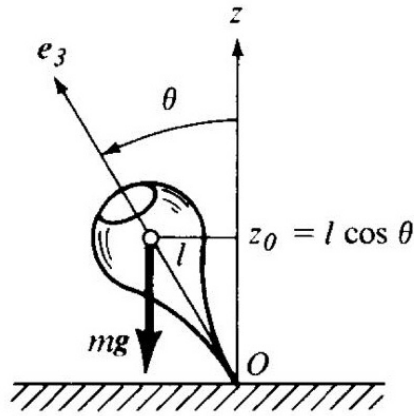


Figura 7.10: Trottola di Lagrange.

$$V = mgh \cos \vartheta$$

e l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 ;$$

la lagrangiana sarà perciò data da

$$\mathcal{L} = T - V = \mathcal{L}(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}) .$$

È facile vedere che φ, ψ sono coordinate cicliche e che inoltre \mathcal{H} si conserva e coincide con l'energia. Gli integrali primi del moto perciò sono

$$\begin{aligned}
 p_\varphi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1 \sin^2 \vartheta + I_3 \cos^2 \vartheta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \vartheta \\
 p_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) = I_3 \omega_z = L_z \\
 E &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + Mgh \cos \vartheta
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Non ci addentriamo ulteriormente nei calcoli e facciamo riferimento al libro di testo. Con questo capitolo si è vista la "potenza" del formalismo lagrangiano: la possibilità di risolvere problemi anche complessi con il solo utilizzo di equazioni e di quantità scalari.

Capitolo 8

Formalismo hamiltoniano

Incominciamo ora lo studio della meccanica classica analizzandola da una nuova ottica dettata dal formalismo proposto da Hamilton; per farlo sarà necessario introdurre nuove coordinate e un nuovo spazio ma le eventuali difficoltà concettuali iniziali sono giustificate dalla grande utilità che offre l'astrazione hamiltoniana dello studio del moto dei corpi.

8.1 Principio di Hamilton nello spazio delle configurazioni

Per prima cosa ricordiamo che \mathcal{C}^n è lo spazio della configurazioni già introdotto nel capitolo 3 e in cui i vincoli sono olonomi, bilateri e a lavoro virtuale totale nullo ed in seguito introduciamo il cosiddetto *spazio dei cammini su \mathcal{C}^n* , ossia una mappa almeno differenziabile che associa $t \mapsto (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ e che rappresenta la traiettoria del punto rappresentativo del sistema¹ nello spazio delle configurazioni. Osserviamo che lo spazio dei cammini è uno spazio duale.

Principio 8.1 (di Hamilton). *Data una lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ si consideri il funzionale di Hamilton definito da*

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (8.1)$$

con t_1 e t_2 fissati. Allora tra tutti i possibili cammini il moto effettivo del sistema è quello che rende stazionario \mathcal{I} , ovvero tale per cui $\delta\mathcal{I} = 0$.

I cammini possibili sono *cammini variati sincroni* e ciò significa che il punto rappresentativo del sistema percorre tutti i cammini che congiungono

¹È opportuno ricordare in virtù di chiarezza che nello spazio \mathcal{C}^n un singolo punto rappresenta l'effettiva posizione (o, meglio, configurazione) di n punti materiali ma in sé non ha un significato fisico particolare.

il punto iniziale $q(t_1) \stackrel{\text{def}}{=} q^{(1)}$ a quello finale $q(t_2) = q^{(2)}$ nel tempo $t_2 - t_1$. Risulta quindi chiaro che tali traiettorie non sono reali cammini fisici e inoltre ognuno di essi varia da quello vicino per insiemi di spostamenti virtuali δq che, ovviamente, negli estremi valgono $\delta q^{(1)} = \delta q^{(2)} = 0$.

Vediamo ora che è possibile ritrovare l'equazione di Lagrange dal Principio di Hamilton.

$$\begin{aligned} 0 = \delta \mathcal{I} &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{L}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \delta q_k \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \delta q_k \right] dt, \end{aligned}$$

ma sappiamo che

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{q^{(1)}}^{q^{(2)}} = 0,$$

quindi questo termine, una volta integrato, non contribuisce.

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k \right] dt$$

e siccome i δq_k sono indipendenti fra loro, questo vuol dire che $\forall k$ vale l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0.$$

Il vantaggio di questa formulazione alternativa delle equazioni di Lagrange è che sono state ricavate da un principio variazionale e la presenza di una funzione integrale suggerisce di poter estendere tale principio anche a sistemi continui e ai campi classici.

In ambito hamiltoniano è prassi comune utilizzare uno spazio diverso da quello delle configurazioni \mathcal{C}^n , chiamato *Spazio delle Fasi* e denotato con \mathcal{F}^{2n} in cui le coordinate sono $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ tra loro indipendenti.

8.2 Equazioni di Hamilton

Trasformata di Legendre

La trasformata di Legendre, fondamentale per lo sviluppo della teoria hamiltoniana, è un procedimento che trasforma una funzione convessa di variabili reali e a valori reali in un'altra funzione convessa dipendente esplicitamente dalla derivata della funzione di partenza. Per semplificare trattiamo il caso monodimensionale; sia dunque $f : x \mapsto f(x)$ una funzione convessa, ovvero tale che $f'' > 0$. Prendiamo inoltre $p \in \mathbb{R}$ tale che $p \neq 0$ fissato e

consideriamo la retta $y = px$. Cerchiamo ora il punto $x = x(p)$ in cui la curva data dalla funzione f ha distanza massima, solo nella direzione verticale, dalla retta $y = px$; ovvero che la funzione $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $(x, p) \mapsto F(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} px - f(x)$ abbia un massimo rispetto a x nel punto $x(p)$. Svolgendo i calcoli otteniamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p - f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = p ,$$

da cui possiamo ricavare $x = x(p)$, osservando che tale x per via della convessità della funzione è unico. Il punto $x = x(p)$ diventa funzione facendo variare p in un intervallo.

Definiamo perciò la *trasformata di Legendre* di f come

$$g(p) \stackrel{\text{def}}{=} F(p, x(p)) .$$

Prendiamo la lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ e calcoliamo la sua trasformata di Legendre:

$$F(q, p) \stackrel{\text{def}}{=} p\dot{q}(p) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{H}(q, p, t) .$$

Osservazione 8.1. *La condizione di convessità $\text{Hess}(\mathcal{L}) \neq 0$ è equivalente a dire che, nell'ipotesi di potenziali ordinari, $\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2} \neq 0$.*

Siccome i sistemi in cui l'energia cinetica non soddisfa la condizione data dall'osservazione precedente sono rari, possiamo affermare che tutti i sistemi lagrangiani da noi trattati ammettono trattazione hamiltoniana.

8.2.1 Da formalismo Lagrangiano

Grazie a quanto visto circa le trasformate di Legendre, abbiamo la relazione che collega le grandezze fisiche \mathcal{H} e \mathcal{L} rispettivamente scritte nello spazio delle fasi \mathcal{F}^{2n} e nello spazio della fasi \mathcal{C}^n , data da

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_k \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) .$$

Differenziamo entrambi i membri ed otteniamo:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt = \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

dove il secondo e il quarto termine a secondo membro si semplificano. Ugua- gliando i coefficienti dei vari differenziali otteniamo

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} .$$

dove il secondo e quarto termine al secondo membro si semplificano. La terza relazione, mette in evidenza la variazione temporale di \mathcal{H} e \mathcal{L} e ci era già nota; per le altre due si ritrova il seguente sistema di $2n$ equazioni

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \quad (8.2)$$

le quali vengono definite come *equazioni di Hamilton* o alternativamente *sistema canonico*: come si osserva immediatamente queste sono $2n$ equazioni differenziali del primo ordine perciò saranno necessarie $2n$ condizioni iniziali del problema per riuscire a risolvere tale sistema.

È opportuno mettere in evidenza due considerazioni circa le costanti del moto:

- se una coordinata q_j è ciclica per una certa lagrangiana, allora lo è anche per la relativa hamiltoniana.
- L'hamiltoniana si conserva se non dipende esplicitamente dal tempo:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

e sostituendovi le equazioni di Hamilton (8.2)

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

8.2.2 Da Principio Variazionale

Le equazioni di Hamilton sono ricavabili anche entro il principio variazionale di Hamilton descritto da 8.1: vediamo come renderle esplicite in questa sezione. Ipotizziamo per prima cosa che lo spazio dei cammini non sia quello descritto in precedenza ma che sia descritto in ambito hamiltoniano dalla mappa che associa $[t_1, t_2] \mapsto \mathcal{F}^{2n}$ e che i cammini stessi siano variati sincroni. L'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ è lo stesso per ogni cammino, $\delta q|_{(1)} = \delta q|_{(2)} = 0$ e infine $\delta p|_{(1)} = \delta p|_{(2)}$, condizione dovuta al fatto di essere nello spazio delle fasi e non più in \mathcal{C}^n . Sfruttando la definizione $\mathcal{L} = p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}$, dove ricordiamo la presenza della fondamentale sommatoria sottintesa, abbiamo che

$$0 = \delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left[p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt.$$

Il primo membro dell'integrando risulta essere

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt = p_i \delta q_i|_{(1)}^{(2)} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt$$

ove $p_i \delta q_i \Big|_{(1)}^{(2)} = 0$ per l'ipotesi sulle condizioni iniziale e finale di δq . Da questa considerazione il principio variazionale si riduce a

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) \delta p_i dt .$$

Siccome i δq_i e i δp_i sono n oggetti indipendenti tra loro dovrà per forza essere vero che i coefficienti moltiplicativi², ossia i termini tra parentesi, siano tutti nulli e ciò equivale a

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} , \end{cases} \quad (8.3)$$

vale a dire le equazioni di Hamilton che abbiamo già avuto modo di ricavare.

8.3 Trasformazioni canoniche

Lo studio di un sistema nel formalismo proposto da Hamilton si avvale di un particolare tipo di trasformazioni, dette canoniche, grazie alle quali è possibile capire meglio la struttura della teoria senza perdere informazioni utili alla soluzione di problemi particolari.

Nello spazio delle configurazioni \mathcal{C}^n le funzioni $Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_n, t)$ sono differenziabili ed invertibili e conservano le equazioni di Lagrange in forma, come abbiamo già avuto modo di osservare. Nello spazio delle fasi \mathcal{F}^{2n} sono differenziabili ed invertibili tutte le funzioni

$$\begin{cases} Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ P_j = P_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) , \end{cases} \quad (8.4)$$

ma queste condizioni non sono sufficienti.

Definizione 8.1 (Trasformazione canonica). *La trasformazione di coordinate (8.4) è canonica se la struttura delle equazioni di Hamilton è mantenuta.*

La definizione appena data significa che se la trasformazione delle coordinate (8.4) è effettivamente canonica, per ogni scelta di una hamiltoniana

²Evidenziamo ancora una volta la sommatoria sottointesa, grazie alla quale le funzioni integrande risultano combinazioni lineari dei δq_i e dei δp_i

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, t)$ che soddisfi (8.2), allora esiste una nuova hamiltoniana \mathcal{K} tale che valgono

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} \end{cases} \quad (8.5)$$

e risulta quindi chiaro che non tutte le trasformazioni saranno canoniche.

8.3.1 Criterio di Lie

Il criterio che dà nome a questa sezione è una condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione sia canonica e ne dimostreremo solo la necessità. Se (8.4) è canonica, allora vale il principio di Hamilton.

$$0 = \delta \int_{(1)}^{(2)} (p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}) dt = \delta \int_{(1)}^{(2)} (P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K}) dt$$

e attraverso la 1-forma differenziale $p_i dq_i - \mathcal{H} dt$ su $\mathcal{F}^{2n} \times \mathbb{R}$, otteniamo che tale integrale è pari a

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} (p_i dq_i - \mathcal{H} dt) = \delta \int_{(1)}^{(2)} (P_i dQ_i - \mathcal{K} dt) .$$

Abbiamo quindi che

$$p_i dq_i - \mathcal{H} dt = P_i dQ_i - \mathcal{K} dt + dF , \quad (8.6)$$

dove dF è il differenziale totale di una F arbitraria tale che $\delta F|_{(1)}^{(2)} = 0$ e $F = F(q, p, t)$: la costante dF è quindi pari a

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial F}{\partial t} dt ,$$

espressione che sostituita nella (8.6) e ricordato che $Q = Q(q, p, t)$, ci restituisce l'uguaglianza

$$p_i dq_i - \mathcal{H} dt = P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j + P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} dp_j + P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt - \mathcal{K} dt + \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial F}{\partial t} dt .$$

Uguagliando gli addendi che moltiplicano dt otteniamo la relazione $-\mathcal{H} = P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} - \mathcal{K} + \frac{\partial F}{\partial t}$, nella quale isoliamo il termine \mathcal{K} e lo risostituiamo sempre in (8.6), ottenendo la cosiddetta *condizione di Lie*

$$p_i dq_i - P_i \left(dQ_i - \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt \right) = dF - \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (8.7)$$

Definiamo adesso $\widetilde{dQ}_i = dQ_i - \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt$ e $\widetilde{dF} = dF - \frac{\partial F}{\partial t} dt$, che sono differenziali a tempo congelato, e grazie a queste definizioni la (8.7) diventa

$$p_i dq_i - P_i \widetilde{dQ}_i = \widetilde{dF} \quad (8.8)$$

che esprime il *Criterio di Lie* e dove la funzione F è detta funzione generatrice della trasformazione canonica.

Osserviamo che nell'equazione (8.8) vi sono $4n$ variabili

$$2n(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) + 2n(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$$

le quali però sono legate da $2n$ relazioni, perciò abbiamo solamente $2n$ coordinate indipendenti.

La funzione F grazie alle trasformate di Legendre può dipendere da diversi insiemi di $2n$ variabili oltre a quelle che le abbiamo attribuito nella precedente trattazione, infatti si definiscono convenzionalmente

$$\begin{cases} F_1 = F_1(q, Q, t) \\ F_2 = F_2(q, P, t) \\ F_3 = F_3(p, Q, t) \\ F_4 = F_4(p, P, t) \end{cases} \quad (8.9)$$

in cui richiamiamo l'attenzione che l'ordine di queste variabili non è casuale e deve essere memorizzato in tale maniera. Ovviamente le F_i con $i = 1, \dots, 4$ sono collegate da alcune relazioni, vediamo quali.

Sostituiamo la funzione F_1 in (8.6) e otteniamo una relazione differenziale con passaggi simili a quelli seguiti in precedenza:

$$p_i dq_i - \mathcal{H} dt = P_i dQ_i - \mathcal{K} dt + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt .$$

Uguagliando ancora i coefficienti comuni dei vari differenziali troviamo le cosiddette *relazioni definenti per F_1* , ovvero

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i, \quad -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = P_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad \forall i . \quad (8.10)$$

Integrando queste relazioni separatamente dovremo sempre ricordare di sommare al risultato dell'integrale una generica funzione dell'opportuna variabile:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i} dq_i &= \int p_i dq_i = p_i \int dq_i, \quad \text{a meno di una funzione } g(Q) \\ - \int \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i} dQ_i &= P_i \int dQ_i, \quad \text{a meno di una funzione } h(q) . \end{aligned}$$

Definiamo ora $F_2(q, P, t) \stackrel{\text{def}}{=} F_1(q, Q, t) + P_i Q_i$ tramite la trasformata di Legendre opportuna e osserviamo che possiamo sostituire in (8.6) la funzione F_1 in termini di F_2 ottenendo

$$p_i dq_i - \mathcal{H} dt = -Q_i dP_i - \mathcal{K} dt - P_i dQ_i + P_i dQ_i + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt$$

da cui discendono le relazioni definenti per F_2 ,

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad \forall i. \quad (8.11)$$

Lasciamo al lettore volenteroso la derivazione delle relazioni definenti per F_3 ed F_4 , che non presentano alcuna difficoltà rispetto ai due esempi appena visti.

Se si applica la trasformazione identità, vengono associate $q_i \rightarrow Q_i$ e $p_i \rightarrow P_i$,

perciò risulta che $F_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n q_j P_j$, infatti in questo modo si vede immediatamente che sono verificate le relazioni definenti (8.11).

N.B.: Si consideri una trasformazione indipendente dal tempo che fornisce in generale

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{H}(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_2(q, P(q, p, t), t)}{\partial t}.$$

L'ultimo termine risulta nullo e allora $\mathcal{K}(Q, P, t) = \widehat{\mathcal{H}}(Q, P, t)$.

8.4 Parentesi di Poisson

Le coordinate di un punto nello spazio della fasi, come già detto, sono $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{F}^{2n}$, dove le funzioni q e p , dette osservabili, sono di classe $C^\infty(\mathcal{F}^{2n})$ e la dinamica di tale punto rappresentativo del sistema è regolata dalla funzione, sempre $C^\infty(\mathcal{F}^{2n})$, hamiltoniana $\mathcal{H} : \mathcal{F}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$.

Introduciamo una nuova operazione binaria su $C^\infty(\mathcal{F}^{2n})$ detta *parentesi di Poisson* $[,] : C^\infty(\mathcal{F}^{2n}) \times C^\infty(\mathcal{F}^{2n}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{F}^{2n})$ definita su funzioni $u, v \in C^\infty(\mathcal{F}^{2n})$ come

$$(u, v) \mapsto [u, v]_{q,p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i},$$

dove la sommatoria è spesso sottintesa e dove il pedice della parentesi può essere omesso sottintendendo per convenzione che le derivate parziali siano fatte rispetto q_i e p_i . Richiamiamo l'attenzione sul fatto che in generale tale operazione è indicata, equivalentemente, con il simbolo $\{, \}$ o $[,]$. Scegliamo quest'ultima notazione per l'intera trattazione.

Le proprietà di questa funzione sono

- antisimmetria: $[u, v] = -[v, u]$.
- Bilinearità: $[au_1 + bu_2, v] = a[u_1, v] + b[u_2, v] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- Identità di Jacobi: $[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0 \quad \forall u, v, w \in C^\infty(\mathcal{F}^{2n})$. Questa relazione contiene anche derivate seconde le quali però si elidono a due a due, quindi la parentesi di Poisson è un'operazione chiusa e non dà informazioni oltre le derivate parziali prime. (verifica omessa)

Se alle funzioni q_j e p_j , dipendenti solo dal tempo e indipendenti fra di loro, sono applicate le parentesi vengono restituiti risultati notevoli, tra i quali:

$$[q_k, q_j] = \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \overbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_i}}^0 - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \overbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_i}}^0 = 0.$$

e allo stesso modo $[p_k, p_j] = 0$.

$$[q_k, p_j] = \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \overbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}^0 = \sum_i \delta_{ki} \delta_{ji} = \delta_{ij},$$

mentre si verifica immediatamente che $[p_j, q_k] = -\delta_{ij}$; identici risultati si sarebbero trovati se avessimo usato le variabili canoniche Q e P .

La proprietà più importante e che andiamo a dimostrare delle parentesi è quella di essere un **invariante canonico**.

Dimostrazione. Siano $Q = Q(q, p, t)$ e $P = P(q, p, t)$ trasformazioni canoniche e invertibili e siano $u, v \in C^\infty(\mathcal{F}^{2n})$.

$$[u, v]_{q,p} = [u(Q(q, p), P(q, p)), v(Q(q, p), P(q, p))]_{q,p}$$

e ora deriviamo pezzo per pezzo applicando la definizione della parentesi di Poisson.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial q_k} &= \frac{\partial u}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \\ \frac{\partial v}{\partial q_k} &= \frac{\partial v}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} + \frac{\partial v}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \end{aligned}$$

e così si calcolano anche $\partial u/\partial p_k$ e $\partial v/\partial p_k$, si moltiplicano i vari fattori e si raccolgono gli opportuni termini (è lasciato al lettore volenteroso lo svolgimento di tali passaggi algebrici) fino a ricondursi alla situazione

$$\frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial v}{\partial Q_j} [Q_k, Q_j] + \frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial v}{\partial P_j} [Q_k, P_j] + \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial v}{\partial Q_j} [P_k, Q_j] + \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial v}{\partial P_j} [P_k, P_j]$$

dove le parentesi sono calcolate come da convenzione rispetto q e p e dove è sottintesa la sommatoria sugli indici i, j . Sfruttiamo ora le quattro proprietà notevoli osservate in precedenza e vediamo che l'espressione si riduce a

$$\frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial v}{\partial P_k} - \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial v}{\partial Q_k} = [u, v]_{Q,P} \quad (\text{somma su } k \text{ sottointesa}).$$

□

Da questa dimostrazione siamo riusciti quindi a vedere che l'operazione delle parentesi permette di capire se la trasformazione $Q = Q(q, p, t)$, $P = P(q, p, t)$ sia canonica o meno siccome la formula appena trovata $[u, v]_{q,p} = [u, v]_{Q,P}$ vale solo in tale ipotesi.

8.5 Teorema di Poisson

Nello spazio delle fasi, come sappiamo, la dinamica è descritta dalla funzione hamiltoniana $\mathcal{H} : \mathcal{F}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ (nel caso in cui ci fosse anche dipendenza temporale, ovviamente, si avrebbe $\mathcal{H} : \mathcal{F}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) e quindi questa può essere un elemento a cui applicare le parentesi di Poisson. Osserviamo che

$$[q_k, \mathcal{H}]_{q,p} = \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \sum_i \delta_{ki} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

dove si è usata la prima equazione di Hamilton in (8.2). In modo analogo si trova che $[p_k, \mathcal{H}] = \dot{p}_k$ e se consideriamo una trasformazione canonica in Q e in P , grazie alla proprietà appena dimostrata, si trova che $\dot{Q}_k = [Q_k, \mathcal{K}]_{Q,P}$ e $\dot{P}_k = [P_k, \mathcal{K}]_{Q,P}$.

Si consideri ora una funzione $u(q, p, t)$ nello spazio delle fasi, allora per questa vale l'utile relazione:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\dot{d}q_i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\dot{d}p_i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial t} = [u, \mathcal{H}] + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (8.12)$$

Per il caso particolare $u = \mathcal{H}$ risulta che

$$\frac{dH}{dt} = 0 + \frac{\partial H}{\partial t},$$

considerazione che ci ricorda la proprietà già osservata in altre occasioni che l'hamiltoniana si conserva se è *esplicitamente* indipendente dal tempo.

Se la funzione u fosse una costante del moto³ allora la sua derivata totale

³A tal proposito notiamo che se una coordinata fosse ciclica, lo sarebbe sia in ambito lagrangiano che hamiltoniano perchè $\mathcal{H} = p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$

rispetto al tempo sarebbe nulla e ne conseguirebbe che

$$[u, \mathcal{H}] = -\frac{\partial u}{\partial t};$$

se inoltre fosse anche esplicitamente indipendente dal tempo, la sua parentesi di Poisson con l'Hamiltoniana sarebbe nulla.

Siamo pronti per enunciare il

Teorema 8.1 (di Poisson). *Date u e v funzioni canoniche, allora*

$$\frac{d}{dt}[u, v] = [\dot{u}, v] + [u, \dot{v}]$$

Dimostrazione. Sfruttando la (8.12) sappiamo che

$$\frac{d}{dt}[u, v] = [[u, v], \mathcal{H}] + \frac{\partial [u, v]}{\partial t},$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial [u, v]}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial t} \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial t} \frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial^2 v}{\partial q \partial t} = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Tramite l'identità di Jacobi e la linearità della parentesi di Poisson vediamo che, facendo attenzione ai segni, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u, v] &= [u, [v, \mathcal{H}]] + [[u, \mathcal{H}], v] + \left[\frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \left[u, \frac{\partial v}{\partial t} \right] = \\ &= \left[u, [v, \mathcal{H}] + \frac{\partial v}{\partial t} \right] + \left[[u, \mathcal{H}] + \frac{\partial u}{\partial t}, v \right] \end{aligned}$$

e utilizzando (8.12) concludiamo

$$\frac{d}{dt}[u, v] = \left[u, \frac{dv}{dt} \right] + \left[\frac{du}{dt}, v \right] = [u, \dot{v}] + [\dot{u}, v].$$

□

Due costanti del moto tali che $[u, v] = 0$ sono dette *di involuzione*.

8.6 Teorema di Liouville

Consideriamo lo spazio \mathbb{R}^{2n} , caso particolare di \mathcal{F}^{2n} e diciamo $\bar{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ il vettore $2n$ -dimensionale di componenti

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

dove l'ordine non è casuale. Introduciamo la *matrice simplettica standard*, una tabella quadrata di lato $2n$ e definita come

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}$$

in modo tale che, detta $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ l'hamiltoniana eventualmente dipendente dal tempo, allora l'equazione

$$\dot{\bar{x}} = \mathcal{J} \vec{\nabla}_{\bar{x}} \mathcal{H}(\bar{x}, t) \quad (8.13)$$

è una semplice espressione che riassume tutte le $2n$ equazioni di Hamilton (8.2) in \mathbb{R}^{2n} e dove il simbolo $\vec{\nabla}_{\bar{x}}$ sta a significare che il vettore gradiente si riferisce alle $2n$ coordinate canoniche. Se \mathcal{H} non dipende esplicitamente da t si dice che l'equazione (8.13) è un *sistema dinamico autonomo*.

Lemma 8.1. *Se l'hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\bar{x})$ ha derivate seconde continue, allora il campo vettoriale hamiltoniano $\overline{\mathcal{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J} \vec{\nabla}_{\bar{x}} \mathcal{H}$ è a divergenza nulla.*

Dimostrazione. Con la notazione precedente si trova

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\bar{x}} \cdot \overline{\mathcal{H}} &= \vec{\nabla}_{\bar{x}} \cdot (\mathcal{J} \vec{\nabla}_{\bar{x}} \mathcal{H}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial q} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial q} \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right) = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} = 0 \end{aligned}$$

grazie al teorema di Schwarz e alla continuità delle derivate seconde. \square

Enunciato il Lemma 8.1 utile alla dimostrazione del teorema di Liouville, è necessario introdurre un ulteriore prerequisito, il *flusso hamiltoniano*: questo è la trasformazione canonica dipendente dal tempo definita $S_{\mathcal{H}}^t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ che associa $\bar{x}(0) \mapsto \bar{x}(t)$, ovvero la soluzione $\bar{x} = \bar{x}(t)$ del sistema canonico $\dot{\bar{x}} = \overline{\mathcal{H}}(\bar{x})$.

Teorema 8.2 (di Liouville). *Si consideri la regione $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^{2n}$ tale che $\Omega(0) \equiv \Omega_0$ sia regione semplicemente connessa di volume finito e con frontiera $\partial\Omega_0$ liscia e regolare⁴. Indicata con $|\Omega_0|$ la misura di Ω_0 , allora $S_{\mathcal{H}}^t|\Omega_0| = |\Omega(t)|$ è costante, ovvero*

$$\frac{d|\Omega(t)|}{dt} = 0 \quad \forall t \in [0, \infty) .$$

Si faccia attenzione al termine *volume* che in tale caso è fuorviante: non si sta intendendo il volume in senso comune ma il volume nello spazio delle fasi, che in questo teorema è \mathbb{R}^{2n} ; questo è un volume astratto, uno spazio in cui vivono ed evolvono le varie coordinate q_i e p_i del singolo punto rappresentativo del sistema e che siamo soliti trattare. Il teorema di Liouville ci assicura quindi che un qualsiasi sistema *reale*, e quindi descrivibile mediante *un* punto astratto rappresentativo avente le $2n$ coordinate iniziali q_0 e p_0 , durante la sua evoluzione o il suo moto continua ad essere descrivibile mediante lo stesso numero di parametri.

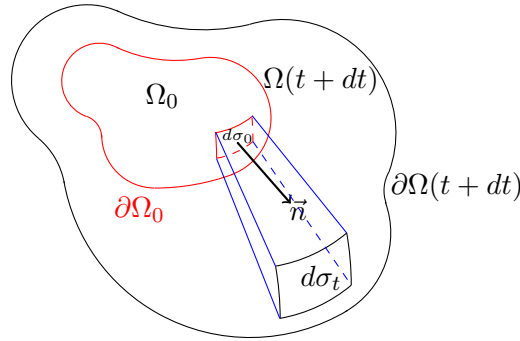


Figura 8.1: Regione Ω .

Dimostrazione. Si faccia riferimento alla Fig. 8.1.

Se la dimensione di Ω_0 è $2n$, allora $\dim \partial\Omega = 2n - 1$. Si consideri una regione infinitesima $d\sigma_0$ della frontiera: facendo evolvere il volume per un intervallo di tempo dt , la regione $\Omega(t)$ diventa $\Omega(t + dt)$: l'elemento $d\sigma_0$ si sarà quindi modificato e spostato divenendo la nuova regione infinitesima $d\sigma_t$. Nel suo spostamento tale elemento delinea un certo prisma di volume $\overline{\mathcal{H}} \cdot \vec{n} d\sigma$, quindi estendendo il ragionamento a tutta la regione Ω si ha che

$$\frac{d|\Omega(t)|}{dt} = \int_{\partial\Omega} (\overline{\mathcal{H}} \cdot \vec{n}) d\sigma = \int_{\Omega} (\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \overline{\mathcal{H}}) dV = 0$$

dove si sono usati il teorema di Stokes nel secondo passaggio e il Lemma 8.1 nel terzo. \square

⁴si richiede quindi che $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ sia una sottovarietà chiusa.

8.7 Trasformazioni canoniche infinitesime

Una trasformazione infinitesima è una trasformazione del tipo (incrementi a tempo congelato)

$$\begin{cases} Q_i = q_i + \delta q_i \\ P_i = p_i + \delta p_i \end{cases} \quad (8.14)$$

con $i = 1, \dots, n$, in cui la trasformazione generatrice deve essere del tipo $F_2 = F_2(q, P)$ (infatti questa classe contiene la trasformazione identità $\sum_i q_i P_i$).

Definiamo per le trasformazioni infinitesime la funzione $F(\varepsilon; q, P) \stackrel{\text{def}}{=} q_i P_i + \varepsilon G(q, P)$, con $|\varepsilon| \ll 1$ e G detta *trasformazione generatrice*, e verifichiamo che mediante le relazioni differenziali per F_2 valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial P_i} & \Rightarrow & \delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial P_i} \\ p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial q_i} & \Rightarrow & \delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial q_i} \end{cases} .$$

Siccome la trasformazione è infinitesima, ha senso considerare piccole variazioni dei parametri in gioco e quindi abbiamo che P_i e Q_i differiscono poco rispettivamente da p_i e da q_i , il che ci permette di interscambiarli l'uno con l'altro ed ottenere

$$\begin{cases} \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p_i} \\ \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q_i} \end{cases} . \quad (8.15)$$

Diciamo ora $u : \mathcal{F}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ canonica in $C^\infty(\mathcal{F}^{2n})$ per la quale vale, approssimando al primo ordine la serie di Taylor,

$$\begin{aligned} \delta u \stackrel{\text{def}}{=} u(q + \delta q, p + \delta p) - u(q, p) &= \sum_i \frac{\partial u}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \delta p_i = \\ &= \sum_i \varepsilon \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} = \varepsilon [u, G]_{q,p} \end{aligned}$$

e troviamo quindi l'importante formula base per le trasformazioni infinitesime $\delta u = \varepsilon [u, G]$.

8.7.1 Teorema di Noether hamiltoniano

Scegliamo una hamiltoniana $\mathcal{H} = u$, quindi

$$\delta \mathcal{H} = \varepsilon [\mathcal{H}, G] = \mathcal{H}(q + \delta q, p + \delta p) - \mathcal{H}(q, p) \quad (8.16)$$

e supponiamo che G sia una costante del moto non dipendente esplicitamente dal tempo per il sistema canonico con hamiltoniana \mathcal{H} . Allora usando (8.12)

sappiamo che $[G, \mathcal{H}] = 0$ e di conseguenza risulta che, dalla (8.16), $\delta\mathcal{H} = 0 \forall \varepsilon$, ciò significa che l'hamiltoniana non varia sotto tale trasformazione e che quindi è una trasformazione di simmetria per \mathcal{H} . Ogni costante del moto in ambito hamiltoniano è di fatto interpretabile come funzione generatrice quindi una trasformazione canonica.

Viceversa, se dalla (8.16) imponiamo $\delta\mathcal{H} = 0$ abbiamo che $\varepsilon[\mathcal{H}, G] = 0 \Rightarrow \frac{dG}{dt} = 0$ e quindi G risulta una costante del moto.

Ritroviamo così il Teorema 4.1 in ambito hamiltoniano, infatti nel caso in cui F (e quindi anche G) dipendesse esplicitamente dal tempo e possibilmente anche \mathcal{H} , posso definire una trasformazione canonica *qualsiasi* di invarianza per il sistema canonico di partenza se

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \hat{\mathcal{H}}(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

ma nel caso di trasformazioni infinitesime tale relazione diventa ovviamente $\mathcal{H}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \forall t$, che sfruttando la definizione (8.14) e le relazioni (8.15), diventa a sua volta

$$\mathcal{H}\left(q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, t\right) = \mathcal{H}(q, p, t) + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t}$$

siccome $\frac{\partial F}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t}$, e sviluppando al primo ordine il primo membro si ha

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t}$$

ossia $[\mathcal{H}, G] = \frac{\partial G}{\partial t}$. Usando infine la proprietà di antisimmetria delle parentesi di Poisson troviamo

$$[G, \mathcal{H}] + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 .$$

Questo dimostra che ad ogni simmetria corrisponde una costante del moto, anche nel caso in cui G dipendesse esplicitamente da t .

Quando il moto è una traslazione la trasformazione è generata da $G = p$ quantità di moto; quando il moto è una rotazione attorno all'asse z , $G = L_z$ momento angolare.

8.8 Simmetrie: esempi

Supponiamo che vi sia una certa simmetria per traslazione, per esempio nella direzione q_j di una quantità δq_j , allora

$$\begin{cases} \delta q_j = \varepsilon \\ \delta q_i = 0 \quad \forall i \neq j \\ \delta p_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n . \end{cases}$$

Sulle ultime due equazioni agisce la trasformazione identità siccome q_i e p_k sono costanti mentre sulla prima la trasformazione generatrice sarà tale che

$$\delta q_j = \varepsilon = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \iff G = p_j + \text{costante} :$$

se quindi δq_j rappresenta una traslazione infinitesima, la funzione p_j , che è il suo momento coniugato, è la trasformazione generatrice.

Quando si ha invece una rotazione infinitesima, argomento già trattato nel paragrafo 7.1.1 e prendendo $N = 1$ per semplicità, si hanno le coordinate $(x, y, z), (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^6$ e $d\theta$ l'angolo di rotazione infinitesima rispetto l'asse z :

$$\vec{R} = (\mathbb{I} + E) \vec{r} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d\theta & 0 \\ d\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \vec{r}$$

e a seconda che si consideri la terna (x, y, z) o (p_x, p_y, p_z) si trovano i due sistemi di relazioni

$$\begin{cases} X = x - yd\theta \\ Y = y + xd\theta \\ Z = z \end{cases} \quad \begin{cases} P_x = p_x - p_y d\theta \\ P_y = p_y + p_x d\theta \\ P_z = p_z . \end{cases}$$

Scriviamo innanzitutto le variazioni infinitesime di questo caso

$$\begin{cases} \delta x = X - x \\ \delta y = Y - y \\ \delta z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta p_x = P_x - p_x \\ \delta p_y = P_y - p_y \\ \delta p_z = 0 \end{cases}$$

e quindi la trasformazione generatrice per la componente z è

$$\begin{cases} G = xp_y - yp_x = L_z \\ \delta x = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_x} = -yd\theta \\ \delta y = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_y} = xd\theta . \end{cases}$$

Al lettore è lasciata la deduzione delle relazioni per le componenti L_x e L_y .

Oltre alle simmetrie spaziali appena studiate esistono anche le simmetrie per traslazioni temporali: assumiamo $\varepsilon = dt$ e $G(q, p) = \mathcal{H}(q, p)$, indipendente esplicitamente dal tempo. Moltiplichiamo per dt le due funzioni e osserviamo che adesso il primo membro $G(q, p)dt$ dipende esplicitamente dal tempo, ovviamente; sfruttando le (8.15) e le equazioni di Hamilton (8.2) otteniamo

$$\delta q_i = dt \frac{\partial G}{\partial p_i} = dt \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = dt \dot{q}_i = dt \frac{dq_i}{dt} = dq_i$$

$$\delta p_i = -dt \frac{\partial G}{\partial q_i} = -dt \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = dt \dot{p}_i = dt \frac{dp_i}{dt} = dp_i$$

da cui vediamo che gli incrementi infinitesimi, nelle traslazioni temporali, coincidono con i differenziali, e quindi si riconosce H come generatrice delle traslazioni temporali.

8.9 Momento angolare e parentesi di Poisson

Un punto di massa m può essere identificato tramite 6 coordinate indipendenti $(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^6 \cong \mathcal{F}^{2n}$. Le componenti del suo momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ possono essere variabili canoniche? In generale no e la dimostrazione di questo si basa sulla associazione tra funzione generatrice della trasformazione canonica di rotazione e una componente di \vec{L} , come vediamo ora.

Ricordiamo che $\vec{F} = \vec{F}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ con $\vec{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ e la sua variazione sotto rotazione di un angolo $d\theta$ intorno al versore \vec{n} è $\delta \vec{F} = d\theta [\vec{F}, \vec{L} \cdot \vec{n}]$, ma d'altra parte la formula per variazione di \vec{F} sotto rotazione infinitesima è $d\vec{F} = \vec{n} d\theta \times \vec{F}$, quindi siccome deve essere verificata l'uguaglianza $\delta \vec{F} = d\vec{F}$ sarà vera la relazione $[\vec{F}, \vec{L} \cdot \vec{n}] = \vec{n} \times \vec{F}$. Supponiamo allora $\vec{F} \equiv \vec{L}$: per la componente x , ad esempio, si avrà $[L_x, \vec{L} \cdot \vec{n}] = (\vec{n} \times \vec{L})_x$ e osserviamo che

$$\begin{cases} [L_x, L_x] = 0 & \text{se } \vec{n} = \vec{i} \\ [L_x, L_y] = L_z & \text{se } \vec{n} = \vec{j} \\ [L_x, L_z] = -L_y & \text{se } \vec{n} = \vec{k}, \end{cases}$$

equazioni ottenute in modo semplice a seconda che \vec{n} sia $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ o $(0, 0, 1)$ nel determinante

$$\det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ L_x & L_y & L_z \end{pmatrix}.$$

In generale se $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ si ottiene che $[L_\alpha, L_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$ dove $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ è il simbolo di Levi-Civita⁵. Osserviamo allora che le componenti di \vec{L} non sono in generale variabili canoniche perchè non soddisfano $[q_j, q_k] = 0$ o $[p_j, p_k] = 0$.

Osservazione 8.2. *Supponiamo L_x ed L_y costanti del moto, il che equivale a dire che $[L_x, \mathcal{H}] = 0$ e $[L_y, \mathcal{H}] = 0$: allora $L_z = [L_x, L_y]$ è anch'essa una*

⁵Questo simbolo matematico nel caso di permutazioni pari assume valore 1 se $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ o $\alpha = \gamma$, in caso contrario vale 0; se il numero di permutazioni è dispari, invece il valore assunto non è più 1 ma -1.

costante del moto, infatti grazie al Teorema 8.5 di Poisson con $u = L_x$ e $v = L_y$ si ha

$$\frac{d}{dt}L_z = \frac{d}{dt}[L_x, L_y] = [\dot{L}_x, L_y] + [L_x, \dot{L}_y] = 0,$$

e quindi concludiamo che il vettore \vec{L} è una costante del moto.

Osservazione 8.3. Posto $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L}$, indipendentemente dalla dinamica si trova con una facile verifica che $[L^2, \vec{L} \cdot \vec{n}] = 0$.

8.10 Campo di forze centrali: approfondimento

In un campo di forze centrali sappiamo valere la legge fondamentale $\dot{\vec{p}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, con f funzione generica del modulo della distanza \vec{r} dal centro di forza.

$$\dot{\vec{p}} \times \vec{L} = \frac{f(r)}{r} \vec{r} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \frac{mf(r)}{r} (\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - r^2\dot{\vec{r}}),$$

ma

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = r\dot{r}$$

quindi sostituendo ciò nella precedente uguaglianza si ottiene

$$mf(r) \left[\frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right] r^2 = mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right).$$

Il caso di orbite kepleriane è quello di maggior interesse ed è contraddistinto da $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ con $k > 0$; si ha che

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} + \underbrace{\vec{p} \times \frac{d\vec{L}}{dt}}_0$$

siccome in un campo di forze centrali il momento $\vec{M} = 0$. Sfruttando le uguaglianze precedenti segue che

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk\vec{r}}{r} \right] = 0$$

e quindi troviamo che in un campo di forze centrali di tipo kepleriano il vettore di Laplace-Runge-Lenz

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk\vec{r}}{r} \quad (8.17)$$

è una costante del moto tutt'altro che immediata.

8.10.1 Orbite chiuse

Consideriamo orbite chiuse di tipo ellittico con il vettore \vec{L} uscente dal foglio e \vec{p} tangente all'orbita, si avrà allora $\vec{p} \times \vec{L}$ ortogonale alla curva tracciata dal corpo orbitante e giacente nel piano del foglio e il vettore \vec{A} con modulo e direzione costante nel tempo, come appena dimostrato, inoltre pure \vec{A} giace nel piano dell'orbita siccome $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$.

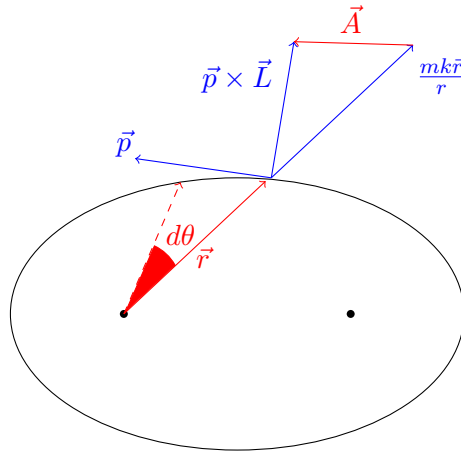


Figura 8.2: Orbita ellittica.

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta = \vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) - mkr = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{L} - mkr = \vec{L} \cdot \vec{L} - mkr = l^2 - mkr$$

quindi

$$r(A \cos \theta + mk) = l^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{l^2}{A \cos \theta + mk}$$

e da questo troviamo

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \frac{A \cos \theta}{mk} \right) \quad (8.18)$$

formula da porre a confronto con la formula per le orbite kepleriane in (6.4) e dal quale evinciamo che le condizioni per conoscere la geometria dell'orbita sono

$$\begin{cases} e = \frac{|\vec{A}|}{mk} \\ \vec{A} \cdot \vec{L} = 0 \end{cases}$$

8.10.2 Costanti del moto nel problema dei due corpi

Dalla trattazione appena svolta e da quella del capitolo 6 riassumiamo che nel problema dei due corpi vi sono sette costanti del moto ossia l'energia E

e i due vettori \vec{A} e \vec{L} , considerando le tre componenti di ciascuno. Vi sono però relazioni che legano alcune di queste grandezze, ossia $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$ e la (6.6) che è una condizione che lega \vec{A} all'energia: le condizioni indipendenti diventano quindi cinque a cui va aggiunta una condizione iniziale (posizione del punto sull'orbita). D'altra parte sappiamo che nel problema dei due corpi vi sono sei gradi di libertà, tre coordinate del centro di massa e tre per il moto rispetto al centro di massa: questo sistema è detto *completamente integrabile* secondo la definizione di Liouville-Arnold la quale afferma che

Definizione 8.2. *Un sistema meccanico è completamente integrabile se ammette un numero di costanti del moto uguale al numero di gradi di libertà.*

8.11 Struttura algebrica dei momenti angolari

Abbiamo già avuto modo di osservare che $[L_\alpha, L_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$ dove $\{L_\alpha, L_\beta, L_\gamma\}$ sono funzioni canoniche e ciascuna genera una rotazione infinitesima.

Definiamo subito $so(3) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}_{\mathbb{R}}\{L_\alpha, L_\beta, L_\gamma\}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 e con struttura algebrica di Lie data da $[\cdot, \cdot] : so(3) \times so(3) \rightarrow so(3)$, identificata dalle costanti di struttura $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Si può verificare che le matrici 3×3 antisimmetriche di rotazione cartesiane usate nel corpo rigido hanno le stesse costanti di struttura:

$$X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il commutatore tra queste matrici è dato da

$$[X_\alpha, X_\beta] \stackrel{\text{def}}{=} X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma.$$

Partendo da $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ su \mathbb{R}^6 ci chiediamo che risultato danno le parentesi di Poisson tra (L_1, L_2, L_3) e tra (A_1, A_2, A_3) . Si può verificare con calcoli piuttosto laboriosi che è verificata la relazione $[A_\alpha, L_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma$ e che detto $A'_\alpha = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} A_\alpha$ vale anche $[A'_\alpha, A'_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$. Visti i risultati è naturale domandarsi che struttura algebrica formino questi due vettori. Dato che l'operazione $[\cdot, \cdot]$ non è chiusa quando applicata alle componenti riscalate del vettore di Runge-Lenz possiamo affermare che certamente non formano una sottoalgebra, ma, se introduciamo due nuovi vettori $\vec{I} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\vec{L} + \vec{A}')$ e $\vec{K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\vec{L} - \vec{A}')$, possiamo verificare che valgono le relazioni $[I_\alpha, I_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} I_\gamma$ e $[K_\alpha, K_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} K_\gamma$; perciò otteniamo una struttura di *due* algebre $so(3)$ (perché abbiamo la chiusura dell'operazione "parentesi di Poisson") chiamata $so(3) \times so(3)$ (prodotto cartesiano) e che è isomorfa a $so(4)$.

Bibliografia

Per completare l'opera, riportiamo i testi da cui abbiamo attinto alcuni degli argomenti trattati e altri che, secondo noi, possono essere utili da consultare.

1. Goldstein, *Meccanica classica*, Zanichelli.
2. Antonio Fasano, Stefano Marmi, *Analytical Mechanics*, Oxford University Press.
3. M. G. Calkin, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*.
4. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag.
5. L. Landau, E. Lifšits, *Fisica teorica Vol. 1 "Meccanica"*, Editori Riuniti.